Г. И. Глейзер
ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ
IV-VI
классы

Г. И. Глейзер

•

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА УРОКАХ

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА ВНЕКЛАССНЫХ ЗАНЯТИЯХ

Г. И. Глейзер

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

IV–VI классы

Пособие для учителей

Москва «Просвещение»
1981

ББК 74.262
Г53

Рекомендовано Главным управлением школ Министерства просвещения СССР

Глейзер Г. И.

Г53 История математики в школе: IV—VI кл. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1981. — 239 с., ил.

В книге в виде коротких статей содержится материал из истории математики, доступный ученикам IV—VI классов.

Материал 1-й части предназначен для занятий на уроках, а 2-ю часть можно использовать на внеклассных занятиях.

В пособии дан набор задач по арифметике, алгебре и геометрии известных математиков прошлых веков. Книга иллюстрирована.

Г $\frac{60501—746}{103(03)—81}$ 122—81 4306020400 ББК 74.262
51(09)(07)

© Издательство «Просвещение», 1981 г.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Предлагаемое пособие предназначено для учителей, работающих в IV—VI классах. В нем содержится материал по истории математики, подобранный в соответствии с современной школьной программой.

Весь материал из двух ранее опубликованных книг[1] Г. И. Глейзера предполагается вновь издать в виде трех книг. Настоящее пособие — это первая книга переработанного издания.

В книге две части: в первой помещен материал по истории математики к программе IV—VI классов, а во второй — материал для внеклассных занятий. Во введении кратко освещены цели, задачи и формы ознакомления школьников с историей математики на уроках и внеклассных занятиях.

В настоящей книге «История математики в школе» весь материал распределен по классам и темам действующей школьной программы, внесены небольшие уточнения и дополнения на основании пометок Г. И. Глейзера в авторском экземпляре. Кроме того, в книгу включены дополнения в следующих местах: IV класс — пункты 4, 20, 22, 24; V класс — пункты 1, 7, 11, 35; VI класс — пункты 26, 29, 38, глава 7, § 7. Помимо того, в эту книгу включена небольшая часть материала из книги Г. И. Глейзера «История математики в средней школе» издания 1971 г.

Автор книги — Глейзер Герш Исаакович умер в 1967 г. Подготовку нового, переработанного издания по просьбе наследников автора и по согласованию с ними выполнил А. А. Свечников — редактор первого издания, значительное время работавший с автором над материалами пособия.

---

[1] См.: Глейзер Г. И. История математики в школе. М., 1964; Он же. История математики в средней школе. М., 1971.

ОБРАЩЕНИЕ К ЧИТАТЕЛЯМ

Предлагаемая книга составлена на основе имеющейся историко-математической литературы и тридцатилетнего личного опыта работы автора в средней и высшей школах. Цель этого пособия — оказать конкретную помощь учителю в использовании исторических материалов по математике при изучении со школьниками определенной программы. При составлении книги автор стремился к тому, чтобы она в известной мере была доступна пониманию и самих школьников.

В пособии по каждой теме программы даны краткие беседы, которые рекомендуется проводить на уроках математики попутно с изучением теоретического материала программы.

В среднем на каждые 6 уроков приходится одна беседа. Это распределение автор рекомендует на основе личного опыта работы, но не считает его образцовым и единственно возможным.

Материал для некоторых бесед может показаться избыточным для использования его на одном уроке. В таком случае учитель сам отберет из предложенного материала то, что, по его мнению, наиболее важно и интересно, или же распределит его на два-три урока.

Условный термин «беседа» следует понимать как сообщение некоторого факта из истории математики, который может быть преподнесен ученикам в виде рассказа учителя, рассмотрения и объяснения рисунка, краткого замечания, разбора задачи, сопровождаемого исторической справкой.

В разделах для внеклассных занятий содержится исторический материал по отдельным избранным вопросам, дополняющий сведения, изложенные в первом разделе. Этот материал предназначен для внеклассных занятий и частично для самостоя-

тельного чтения учениками. В книге приведены исторические задачи, которые рекомендуется использовать на занятиях в кружке или на уроках повторения. Ответы, указания, отдельные решения к задачам, список рекомендованной литературы и именной указатель даны в конце книги. Книга снабжена хронологическим справочником — «Века и годы», который позволит учителю при подготовке к уроку найти нужную дату не только на занятиях в IV—VI классах, но и в более старших.

Книга содержит минимум того, что, по мнению автора, должен знать учитель, преподающий математику в общеобразовательной школе, и заведомо несколько больше того, что может усвоить средний ученик этой школы. Немногие более сложные беседы отмечены звездочкой.

Предлагаемая работа имеет целью дать в руки учителя пособие, которое помогло бы ему конкретно сопровождать изучение школьного курса математики обзором исторического развития науки. Эта сложная научно-методическая задача может получить полное решение только при активном участии широких масс учителей математики, и поэтому просим всех, интересующихся данным вопросом, направить в издательство свои отзывы, критические замечания и предложения по адресу: 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41, редакция математики.

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос об использовании элементов истории в преподавании математики не новый. Еще в конце XIX и в начале XX в. он обсуждался на съездах преподавателей математики. Ему были посвящены в нашей стране и за рубежом специальные работы.

В разное время ученые и методисты по-разному определяли цели введения элементов истории математики в преподавание в зависимости от общественного строя той или иной страны и общих задач школы. Однако общими почти всегда были и остаются поныне следующие цели:

1. Повышение интереса учащихся к изучению математики и углубление понимания ими изучаемого фактического материала.

2. Расширение умственного кругозора учащихся и повышение их общей культуры.

В Советскую эпоху знакомство с историей математики служит общим целям коммунистического воспитания детей.

В наше время юноша или девушка, оканчивающие среднюю школу, должны иметь представление о месте и роли математики в современной передовой культуре.

Программа нашей школы обязывает учителя сообщать ученикам в процессе преподавания сведения по истории математики и знакомить их с жизнью и деятельностью выдающихся математиков.

Однако в программе нет конкретных указаний на то, какие сведения по истории математики следует сообщать учащимся, в каких классах, в каком объеме и по каким разделам школьной математики. Школьные учебники, как известно, тоже таких сведений содержат мало.

Одно сообщение сведений по истории математики далеко не всегда способствует достижению тех целей, о которых говорилось выше. Знакомство учеников с историей математики означает продуманное планомерное использование на уроках фактов из истории науки и их тесное сплетение с систематическим изложением всего материала программы. Лишь такое сплетение может способствовать достижению указанных целей.

Координируя изучение математики с другими предметами, в частности с историей, подчеркивая роль и влияние практики на развитие математики, указывая условия, а иногда и причины зарождения и развития тех или иных идей и методов, мы тем самым способствуем развитию у школьников диалектического мышления и формированию марксистско-ленинского мировоззрения, способствуем процессу их умственного созревания и сознательному усвоению ими учебного материала. Достигнутое таким образом более глубокое понимание школьного курса математики, безусловно, вызовет у учащихся рост интереса к предмету.

Ознакомление учеников с историей математики должно проводиться в основном на уроках математики и лишь во вторую очередь на внеклассных занятиях. При этом не следует рассчитывать на какие-либо дополнительные часы. Залог успеха состоит в умелом использовании элементов истории математики таким образом, чтобы они органически сливались с излагаемым фактическим материалом. Если начать такую работу с IV класса и проводить ее систематически, то со временем исторический элемент станет для самих учащихся необходимой частью урока. Конечно, не может быть речи о прохождении в средней школе какого-то специального курса истории математики. Речь идет о том, чтобы при изучении той или иной темы учитель математики полнее и глубже раскрывал ее содержание, прибегая к истории науки.

Большую методическую трудность представляет решение вопроса об отборе конкретного материала по истории математики и о порядке его использования в том или другом классе. Здесь следует руководствоваться программой по математике. Однако, учитывая возрастные особенности учащихся, нельзя приспосабливаться только к программе. Невозможно, например, ограничить вопросы истории арифметики рамками IV—VI классов. Не только содержание и объем, но и стиль изложения вопросов из истории математики не могут быть одинаковыми в разных классах.

Считаем, что в IV — VI классах следует ограничиться некоторыми начальными сведениями из истории математики и обращать внимание учеников на элементарные вопросы развития счета и численных алгоритмов, математической терминологии и символики, возникновения мер, создания способов измерения и простейших инструментов.

В этих же классах следует частично затронуть и некоторые стержневые вопросы истории математики, как, например, развитие понятия числа, происхождение и некоторые аспекты развития геометрии и алгебры. Целесообразно дать начальные сведения из истории уравнений. Есть немало вопросов из истории математики, к которым приходится возвращаться в курсе средней школы по два-три и больше раз.

Трудным кажется на первый взгляд решение вопроса о том, как выкроить необходимое время. Однако вопрос о времени, как и вопрос о формах использования элементов истории математики на уроках, почти полностью подчинен главному вопросу — связи изучаемой в школе математики с ее историей. Какая бы ни была форма сообщения сведений по истории — краткая беседа, экскурс, лаконичная справка, решение задачи, показ и разъяснение рисунка, использованное время (5—12 мин) нельзя считать потерянным, если только учитель сумеет исторический факт преподнести в тесной связи с излагаемым на уроке теоретическим материалом. В результате такой связи у школьников пробудится повышенный интерес к предмету и тем самым повысится эффективность их занятий.

Опыт работы подсказывает: следует широко использовать для ознакомления с историей математики уроки закрепления пройденного, что будет способствовать оживлению этих уроков. Главную методическую трудность представляет вопрос о том, как на деле сочетать изучение определенного раздела программы математики с изложением соответствующего исторического материала. Преодолеть эту трудность можно лишь постепенно, в ходе планомерной и скрупулезной работы.

Мы старались не загромождать излишними деталями и мелочами изложение основного пути развития школьной математики. Повторение в разных местах книги некоторых хронологических дат поможет ученикам усвоить историческую последовательность наиболее важных фактов. Чтобы ввести начинающего учителя в мир историко-математической литературы и дать ему возможность дополнять сведения по тем или иным вопросам, в сносках даются некоторые библиографические указания.

I

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА УРОКАХ

Кто хочет ограничиться настоящим,
без знания прошлого,
тот никогда его не поймет...

Лейбниц

Глава 1.
АРИФМЕТИКА И НАЧАЛА АЛГЕБРЫ

§ 1. НАТУРАЛЬНЫЕ И ДРОБНЫЕ ЧИСЛА

1. О происхождении арифметики [1]. Счет и десятичная система счисления

Велико значение математики в повседневной жизни человека. Без счета, без умения правильно складывать, вычитать, умножать и делить числа немыслимо развитие человеческого общества. Четыре арифметических действия, правила устных и письменных вычислений изучаются, начиная с начальных классов. Все эти правила не были выдуманы или открыты каким-то одним человеком. Арифметика возникла из повседневной практики, из жизненных нужд людей в их трудовой деятельности. Арифметика развивалась медленно и долго.

Еще в самые отдаленные времена людям приходилось считать различные предметы, с которыми они встречались в повседневной жизни. Было время, когда человек умел считать только до двух. Число два связывалось с органами зрения и слуха и вообще с конкретной парой предметов. «Глаза» у индийцев, «крылья» у тибетцев означало также «два». Если предметов было больше двух, то первобытный человек говорил просто «много». Лишь постепенно человек научился считать до трех, затем до пяти, десяти и т. д.[2].

С развитием производства и торговли счет распространяется на множества, содержащие все большее и большее число предметов (элементов). Люди в своей практической деятельности не могли обходиться без измерения расстояний, площадей земельных участков, вместимости сосудов и т. п. Потребность в измерениях привела к возникновению и развитию как приемов измерений, так и техники счета и правил действия над числами (рис. 1).

---

[1] Арифметика изучает простейшие свойства чисел и операций над ними. Она возникла в глубокой древности и вначале рассматривала только натуральные числа. В связи с потребностями практики постепенно круг вопросов, относящихся к арифметике, значительно расширился. Название «арифметика» происходит от греческого слова αριθμος (арифмос) — число.

[2] От периода первоначального формирования понятия натурального числа не сохранилось никаких документов. Для его изучения история математики прибегает к этнографии и лингвистике.

Таким образом, *возникновение и развитие арифметики связано с трудовой деятельностью людей, с развитием общества.*

* *
*

Известно, что счет у нас ведется десятками: десять единиц образуют один десяток, десять десятков — одну сотню и т. д., иными словами: десять единиц первого разряда образуют одну единицу второго разряда, десять единиц второго разряда — одну единицу третьего разряда и т. д.

Такой *способ счета, группами в десять,* которым пользуемся мы, *называется десятичной системой счисления или десятичной нумерацией.* Число десять называется *основанием* десятичной системы счисления.

Но почему мы считаем именно десятками, то есть как возникла десятичная система счисления?

Подобно тому как учатся считать по пальцам дети, так и люди на первых ступенях развития общества считали с помощью десяти пальцев рук. Поныне ведь говорят: «Перечесть по пальцам...» Отсюда — десятичная или десятеричная система счисления.

Однако были племена и народы, в частности в Африке, которые при счете пользовались лишь пятью пальцами одной руки, считали *пятка́ми:* у них выработалась *пятеричная* система счисления, в которой основой служит число пять. В этой системе имеются названия для первых пяти чисел. Число «шесть», например, называлось «пять — один» и т. д. Следы пятеричной системы сохранились в скандинавских языках. Древнейшей из всех является *двоичная* система счисления, которой, как полагают, пользовались некогда древние египтяне. Следы другой, *двадцатеричной* системы остались поныне, например, в современном

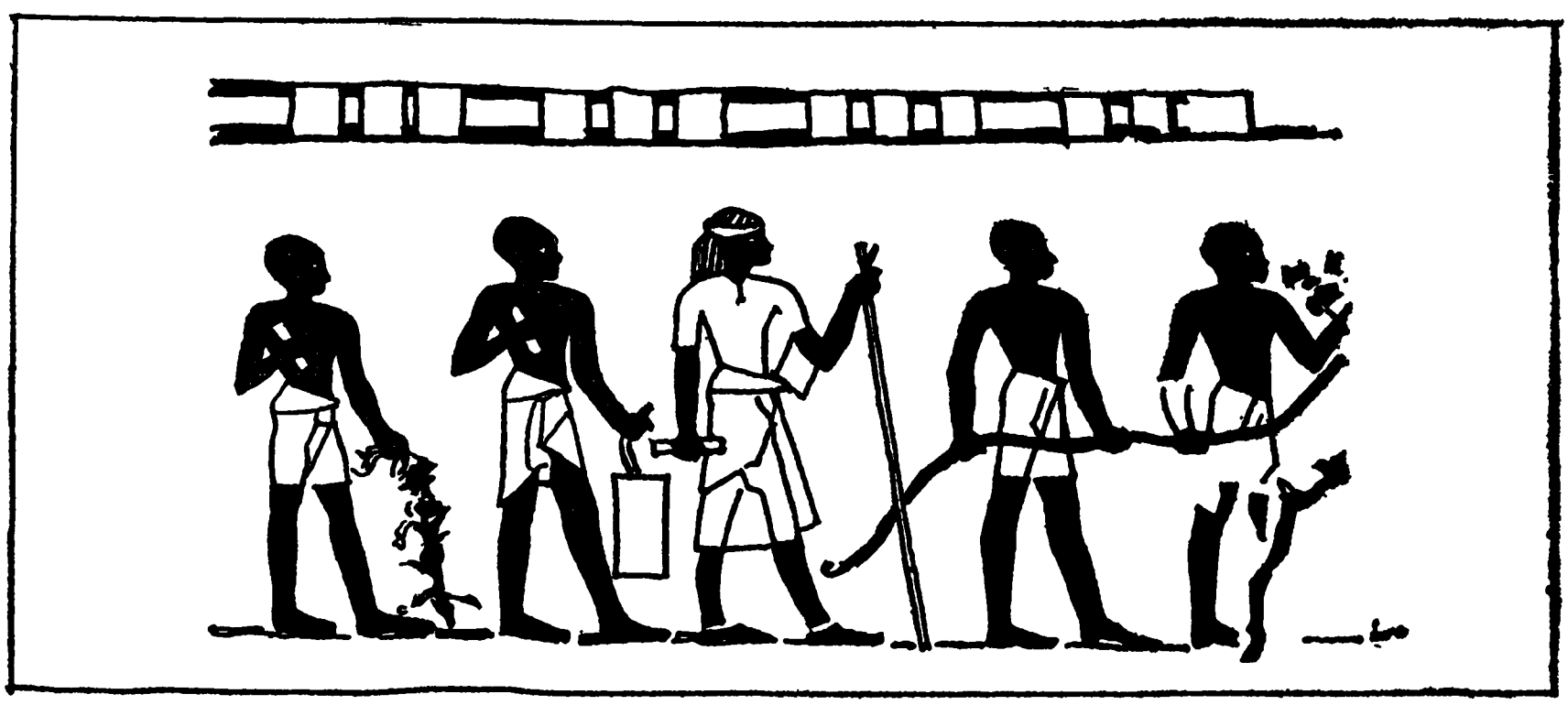


Рис. 1. Межевание у древних египтян. (Рисунок относится примерно к XV в. до н. э.)

грузинском языке и во французском языке, в котором вместо «восьмидесяти» говорят «четырежды двадцать». Двадцатеричная система возникла у народов, считавших не только с помощью пальцев рук, но и пальцев ног. Этой системой пользовались также индейцы племени Майя (см. гл. 7, § 5). Древние вавилоняне пользовались *шестидесятеричной* системой счисления (гл 1, § 1, п. 10). В настоящее время почти все народы мира пользуются десятичной системой счисления.

В десятичной системе названия всех натуральных чисел до 999 миллионов образуются с помощью всего лишь 13 слов: *один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять, сто, тысяча, миллион.* Слово «десять» кое-где сокращается в «дцать», например вместо «два десять» — «двадцать».

Наряду с десятичной системой широкое практическое применение находит в настоящее время и двоичная система счисления в связи с ее применением в быстродействующих счетных машинах (гл. 7, § 7).

2. О происхождении и развитии письменной нумерации. Цифры разных народов

Как бы велико ни было число, его можно записать с помощью всего лишь десяти числовых знаков, цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Цифр, как и правил арифметики, никто сразу не выдумал, не изобрел. Современные цифры были выработаны на протяжении многих веков. Совершенствование начертания цифр шло параллельно с развитием письменности. Вначале букв не было. Мысли и слова выражались при помощи *рисунков* на скалах, на стенах пещер, на камнях. Для запоминания чисел люди пользовались зарубками на деревьях и на палках[1] и узлами на веревках[2] (рис. 2, 3). Далее естественно стали обозначать число один одной черточкой, два — двумя, три — тремя черточками и т. д. Следы таких цифр имеются, например, в римской системе: I, II, III. Но с развитием производства и культуры, когда появилась нужда записывать большие числа, стало неудобно пользоваться черточками. Тогда стали вводить особые знаки для отдельных чисел. Каждое число, как и каждое слово, обозначалось особым значком, *иероглифом.* Вот, например, как выглядят китайские иероглифические цифры (рис. 4).

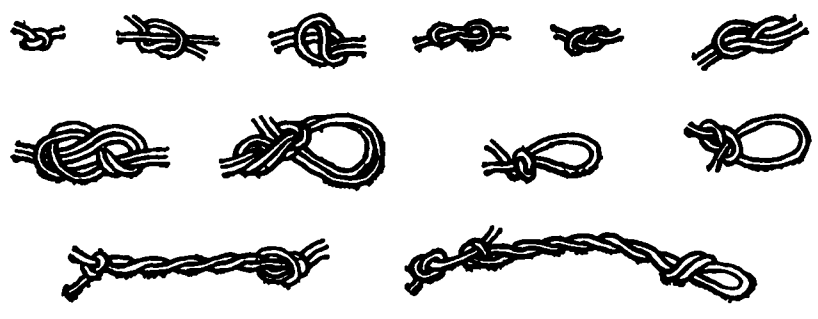


Рис. 2. Узлы, применявшиеся в старину для изображения чисел.

В Древнем Египте около 4000 лет назад имелись другие значки и иероглифы для обозначения чисел (рис. 5 и 6). Единица изображена колом,

[1] Такие палки назывались в России бирками.

[2] См. гл. 7, § 6.

десяток — как бы парой рук, сотня — свернутым пальмовым листом, тысяча — цветком лотоса, символом обилия, сто тысяч — лягушкой, так как лягушек было очень много во время разлива Нила.

В дальнейшем появляются особые обозначения отдельных звуков, то есть *буквы*. Было время, когда буквами пользовались и в качестве цифр. Так поступали древние греки, славяне[1] и другие народы (рис. 7 и 8). Чтобы отличить буквы от чисел, славяне ставили над буквами, изображающими числа, особый знак ▬, названный «титло». Эта нумерация, называемая *алфавитной*, также оказалась со временем неудобной[2]. Потребности практики, развитие производства и торговли способствовали созданию более удобных, современных цифр и образованию современной письменной нумерации.

Рис. 3. Веревочно-узловой счет. Этот рисунок XVI в. изображает счетовода-казначея, одного из коренных жителей Южной Америки (инки). В его руках веревочный прибор для узлового счета. В нижнем левом углу счетная доска.

Всем известны римские цифры:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

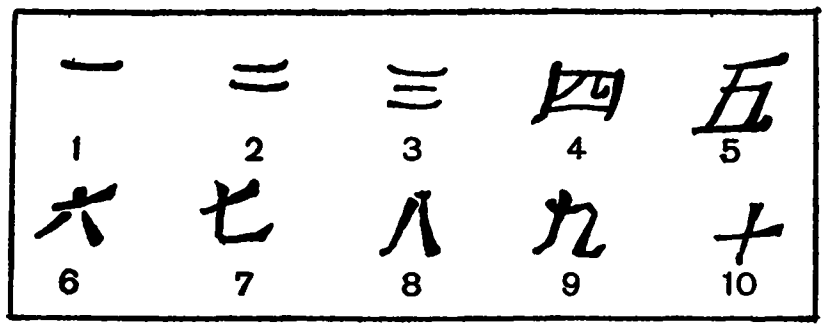


Рис. 4. Китайские иероглифические цифры.

Некоторые из этих семи знаков служили и буквами. Римляне обозначали буквой M тысячу. Вот, например, как записывалось число 38 784: $XXXVIII_mDCCLXXXIV$. Неудобна была римская нумерация по сравнению с нашей десятичной[3]: записи длинные, ум-

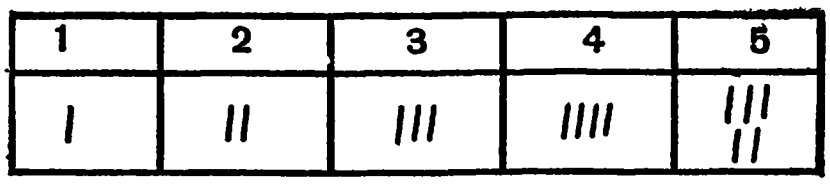


Рис. 5. Египетские иероглифические цифры.

[1] См. гл. I, § 1; 12.

[2] Так как в ней непосредственно нельзя было записывать достаточно большие числа.

[3] И вообще с любой другой позиционной системой.

Рис. 6. Письменная нумерация в Древнем Египте. (Числа расположены в четвертой колонке.)

ножение и деление в письменном виде производить невозможно. Все действия надо производить в уме. Даже чтобы прочитать число, нужно устно складывать или вычитать потому, что каждая из семи римских цифр означает всюду, где бы она ни стояла, одно и то же число. Например, V означает пять единиц (рис. 9) как в числе VI, так и в числе IV. В современной же письменной нумерации не только вид, начертание цифры, но и ее *место,* ее *положение,* ее *позиция* среди других цифр имеет значение. Например, в числе 15 цифра 5 означает 5 единиц, а в числе 53 та же цифра 5 означает пять десятков, т. е. пятьдесят единиц. Именно поэтому наша нумерация называется *позиционной.* Она, как и современные цифры, возникла примерно 1500 лет назад в Индии. Это не значит, что индийские цифры имели с самого начала современный вид. В течение многих столетий, переходя от народа к народу, старинные индийские цифры много раз изменялись, пока приняли современную форму (рис. 10). Арабы заимствовали у индийцев цифры и позиционную десятичную систему, которую европейцы в свою очередь заимствовали у арабов. Поэтому наши цифры, в отличие от римских, стали называть *арабскими.* Правильнее было бы их называть *индийскими* [1].

1	A	10	I Ï	100	K
2	B	20	K	200	S
3	Γ	30	Λ	300	T
4	d	40	M	400	Y
5	E	50	N	500	F
6	U	60	O	600	X
7	Z	70	n	700	Θ
8	h	80	Π	800	Q
9	Φ	90	Ч	900	↑

Рис. 7. Обозначение чисел буквами у готов.

[1] Подробнее о происхождении современных цифр см. гл. 7, § 5.

	Греческое 1	Славянское: Кириллицей 2	Славянское: глаголицей 3	Готское 4	Еврейское 5	Сирийское 6	Арабское 7	Колтское 8	Абисинское 9	Грузинское 10	Армянское 11
1	α̅	а̅	ⰰ	Λ	א	ܐ	ا	ⲁ̅	ⲁ̅	ა	Ա
2	β̅	в̅	ⰱ	Β	ב	ܒ	ب	ⲃ̅	ⲃ̅	ბ	Բ
3	γ̅	г̅	ⰲ	Γ	ג	ܓ	ج	ⲅ̅	ⲅ̅	გ	Գ
4	δ̅	д̅	ⰳ	Α	ד	ܕ	د	ⲇ̅	ⲇ̅	დ	Դ
5	ε̅	є̅	ⰴ	Ε	ה	ܗ	ه	ⲉ̅	ⲉ̅	ე	Ե
6	ϛ̅	ѕ̅	ⰵ	Ϙ	ו	ܘ	و	ⲋ̅	ⲋ̅	ვ	Զ
7	ϛ̅	з̅	ⰶ	Ζ	ז	ܙ	ز	ⲍ̅	ⲍ̅	ზ	Է
8	η̅	и̅	ⰷ	Η	ח	ܚ	ح	ⲏ̅	ⲏ̅	Თ	Ը
9	θ̅	ѳ̅	ⰸ	Ψ	ט	ܛ	ط	ⲑ̅	ⲑ̅	∞	Թ
10	ι̅	і̅	ⰹ	Ϊ	י	ܝ	ى	ⲓ̅	ⲓ̅	ი	Ժ
20	κ̅	к̅	ⰺ	Κ	כ	ܟ	ك	ⲕ̅	ⲕ̅	კ	Ի
30	λ̅	л̅	ⰻ	Λ	ל	ܠ	ل	ⲗ̅	ⲗ̅	ლ	Լ
40	μ̅	м̅	ⰼ	Μ	מ	ܡ	م	ⲙ̅	ⲙ̅	მ	Խ
50	ν̅	н̅	ⰽ	Ν	נ	ܢ	ن	ⲛ̅	ⲛ̅	ნ	Ծ
60	ξ̅	ѯ̅	ⰾ	Ϙ	ס	ܣ	س	ⲝ̅	ⲝ̅	ჲ	Կ
70	ο̅	о̅	ⰿ	Ο	ע	ܥ	ع	ⲟ̅	ⲟ̅	ო	Հ
80	π̅	п̅	ⱀ	Π	פ	ܦ	ف	ⲡ̅		პ	Զ
90	ϙ̅	ч̅	ⱁ	Ϙ	צ	ܨ	ص	ϥ̅		ჟ	Ղ
100	ρ̅	ѳ̅	ⱂ	Ρ	ק	ܩ	ق	ⲣ̅	ⲣ̅	რ	Ճ
200	σ̅	с̅	ⱃ	Σ	ר	ܪ	ر			ს	Մ
300	τ̅	т̅	ⱄ	Τ	ש	ܫ	ش			ტ	Յ
400	υ̅	ѵ̅	ⱅ	Υ	ת	ܬ	ت			უ	Ն
500	φ̅	ф̅	ⱆ	Ϝ	תק		ث			ფ	Շ
600	χ̅	х̅	ⱇ	Χ	תר		خ			ქ	Ո
700	ψ̅	ѱ̅	ⱈ	Ⲟ	תש		ذ			ღ	Չ
800	ω̅	ѡ̅	ⱉ	Ϙ	תת		ض			ყ	Պ
900	ϡ̅	ц̅	ⱊ	↑	ץ		ظ			შ	Ջ
1000	͵α̅	҂а̅	ⱋ		ϰ		غ	ⲁ̅	ⲓ̅ⲓ̅ⲓ̅	ჩ	Ռ
2000	͵β̅	҂в̅					ڠ			ც	Ս
3000	͵γ̅	҂г̅					ڭ			ძ	Վ
4000	͵δ̅	҂д̅					ڭ			წ	Տ
5000	͵ε̅	҂є̅					ڭ			ჭ	Ր
6000	͵ϛ̅	҂ѕ̅					ڭ			ხ	Ց
7000	͵ϛ̅	҂з̅					ڭ			ჯ	Ր
8000	͵η̅	҂и̅					ڭ			ჰ	Փ
9000	͵θ̅	҂ѳ̅					ڭ			ჱ	Ք
10000	ⱑ	ⓐ					ڭ			ჲ	Օ
20000	ⱒ	ⓑ					ڭ				Ֆ

Рис. 8. Алфавитная нумерация у разных народов.

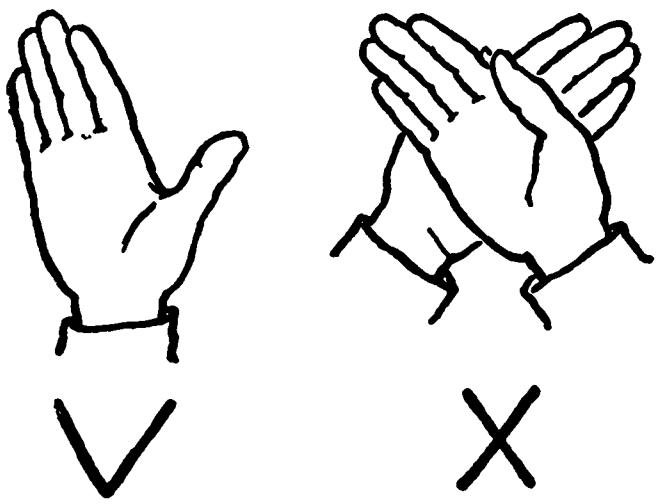


Рис. 9. Предполагаемое происхождение римских цифр V и X.

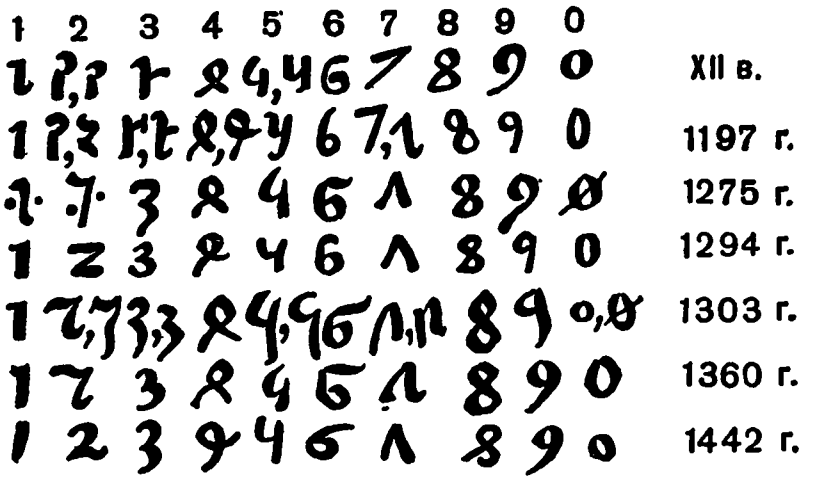


Рис. 10. Эволюция индийских цифр от XII до середины XV в. (начала книгопечатания).

Эти цифры употребляются в нашей стране начиная с XVII в. Римские же цифры применяются лишь в исключительных случаях.

3. О счетных приборах. Русские счеты. Вычислительные машины

Люди издавна старались облегчить себе счет с помощью разных средств и приборов. Первой, самой древней «счетной машиной» были пальцы рук и ног. На них человек научился отсчитывать довольно большие числа. Различными загибами пальцев

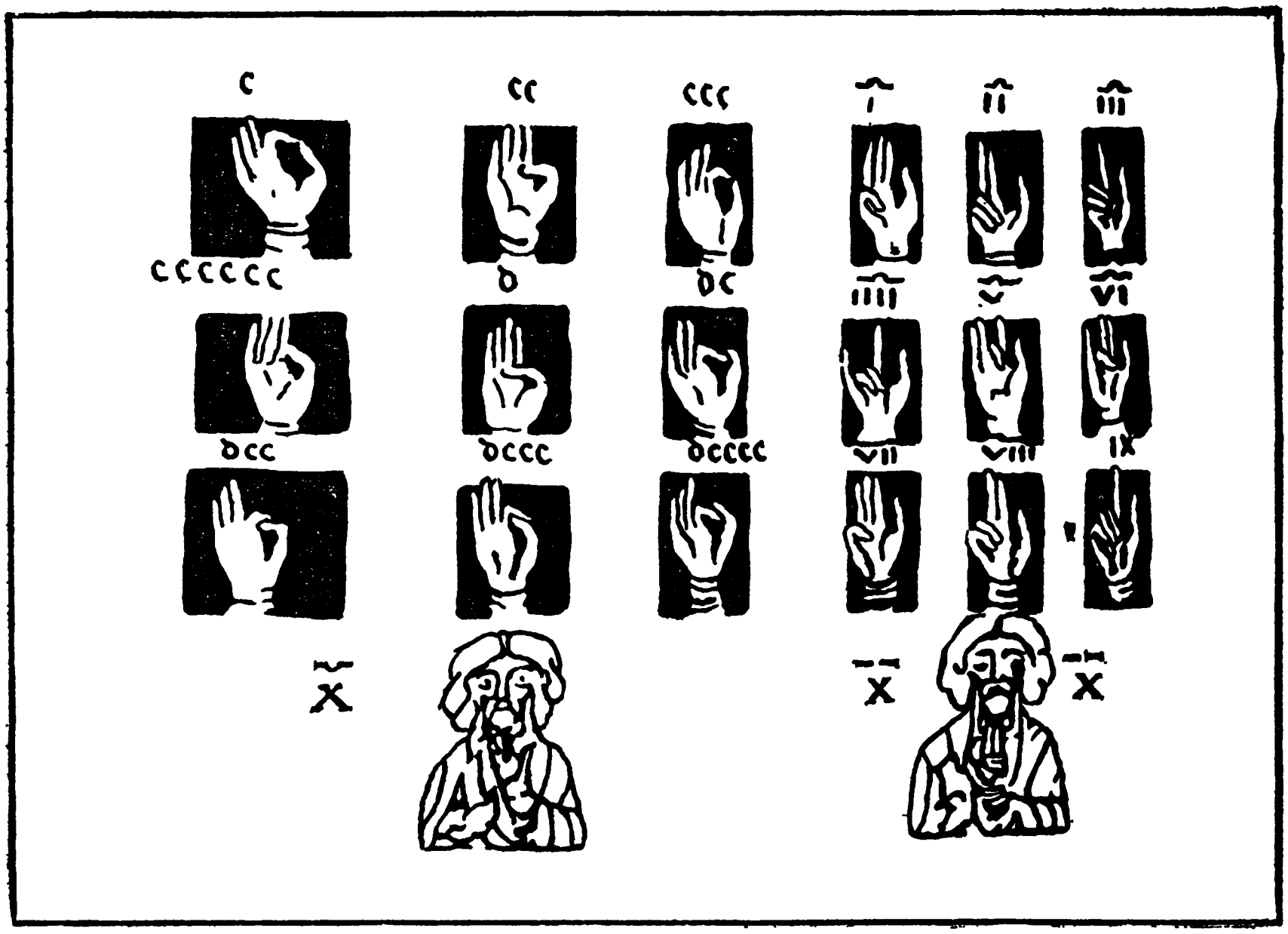


Рис. 11. Изображение пальцевого счета в старой испанской рукописи XIII в. В верхнем ряду числа 100, 200, 300, 1000, 2000, 3000.

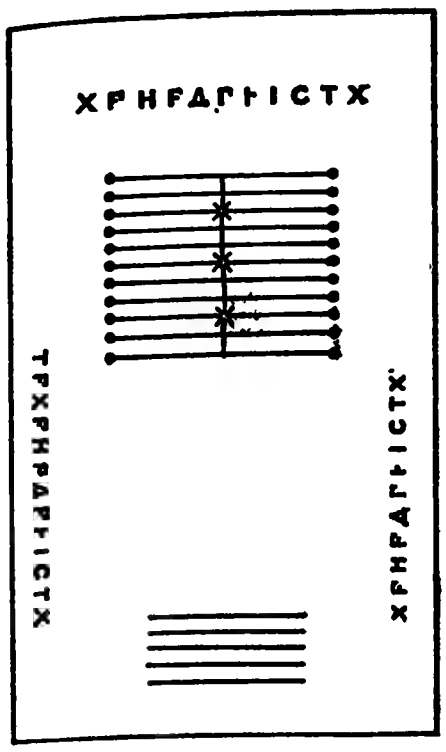


Рис. 12. Древнегреческий мраморный абак, найденный в XIX в. на о. Саламин.

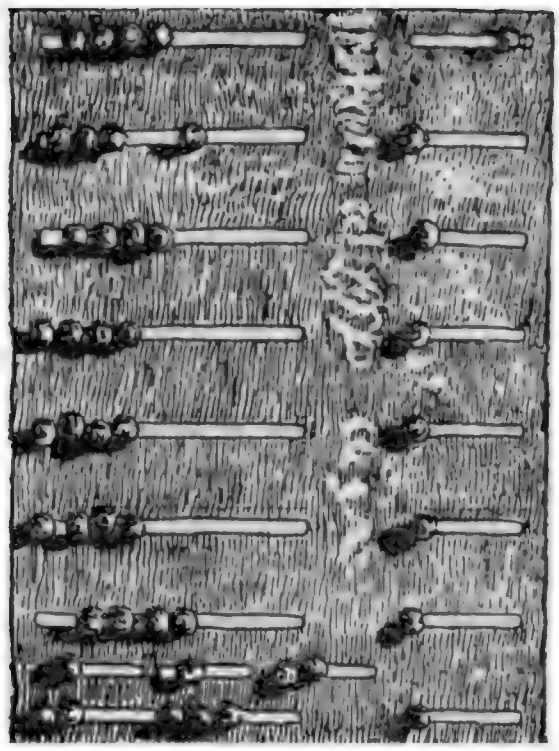


Рис. 13. Древнеримский бронзовый абак.

рук изображали не только единицы и десятки, но сотни и тысячи (рис. 11, 58, 59). Изображение чисел с помощью жестов рук продолжали до миллионов [1].

В древности торговцы (финикийские, вавилонские и других городов) производили расчеты при помощи зерен, камешков и раковин, которые впоследствии стали выкладывать на специальной доске, названной затем абаком[2]. Абак у греков и римлян подвергся дальнейшему усовершенствованию и стал счетной доской, счетным прибором, вроде наших нынешних счетов (рис. 12

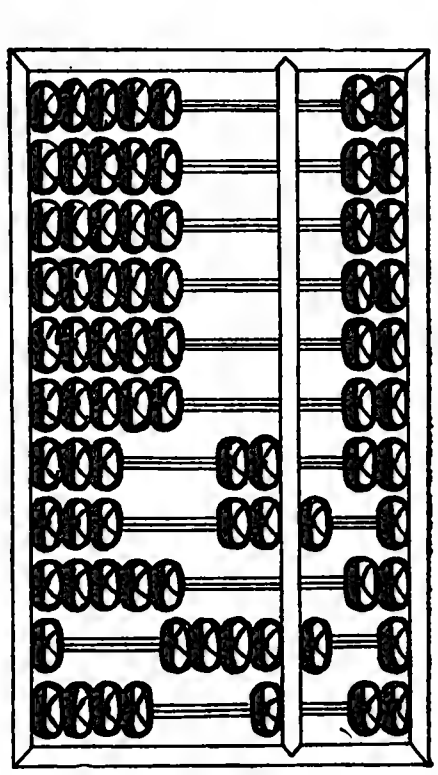


Рис. 14. Китайские счеты «суан-пан».

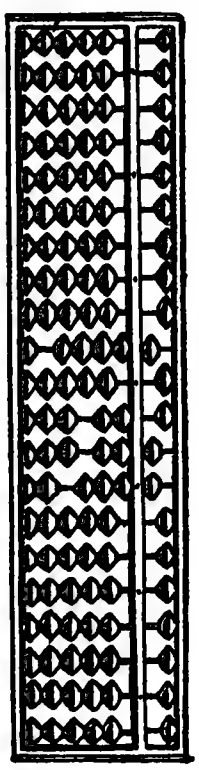


Рис. 15. Японские счеты «соробан».

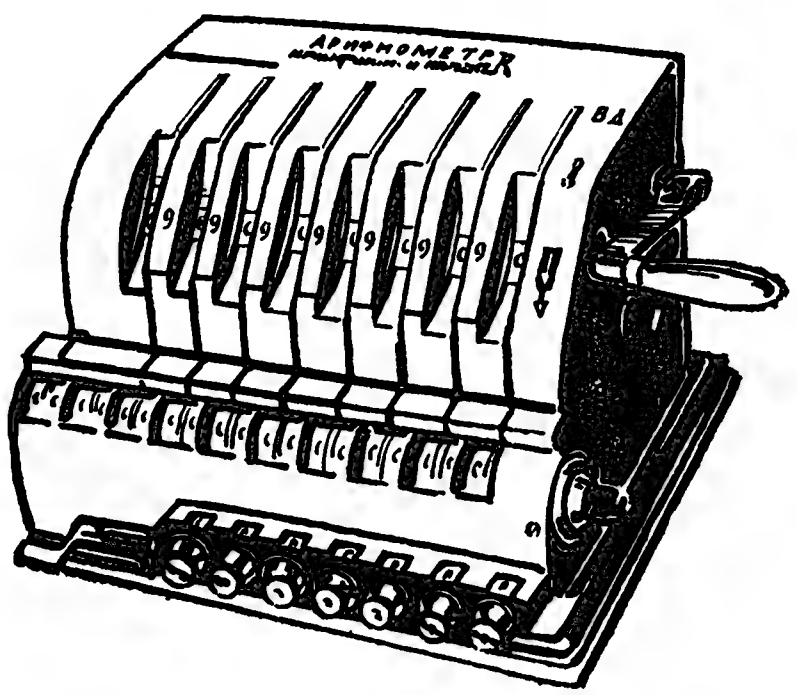


Рис. 16. Арифмометр Однера.

[1] Подробное описание методов счета на пальцах до миллиона дал ирландский ученый монах Беда (VII—VIII вв.), прозванный «Достопочтенный», в своем хронологическом труде «О счете времени». Книга эта была издана в Базеле в 1529 г.

[2] Слово это означает в древнееврейском языке «пыль», «песок». Было время, когда на абак сыпали песок для вычерчивания чисел и фигур и для выполнения арифметических действий.

Рис. 17. Электронная цифровая машина БЭСМ.

и 13). Одним из древнейших счетных приборов являются китайские счеты «суан-пан», поныне употребляемые в Китае (рис. 14). Другой старинный счетный прибор — японский «соробан» (рис. 15).

Русские счеты употребляются нашим народом, вероятно, начиная с XVI в. С давних пор употребляются такие выражения, как «сбрасывать со счета», «прикидывать», «скидка» и т. п. Большое преимущество русских счетов заключается в том, что они основаны на десятичной системе счисления. Употребление десятичных счетов в России объясняется, возможно, тем, что у нас раньше, чем в других странах, появилась *десятичная денежная* система [1]:

1 червонец = 10 рублям;
1 рубль = 10 гривенникам;
1 гривенник = 10 копейкам.

Помимо счетов, в колхозах, совхозах, промышленных и других предприятиях пользовались небольшой вычислительной машиной, названной *арифмометром* (рис. 16). Над созданием вычислительных машин трудились многие ученые начиная с XVII в. Арифмометр, изобретенный в 1878 г. великим русским математиком П. Л. Чебышевым, считался одной из наиболее совершенных математических машин того времени. Широкое распространение получил арифмометр, изобретенный в прошлом веке петербургским инженером В. Т. Однером. Выпускаемые ныне в СССР

[1] При возникновении червонца в XVIII в. он равнялся трем серебряным рублям. Подробнее о русской денежной системе см. гл. 7, § 4.

арифмометры марки «Феликс» являются усовершенствованными арифмометрами системы Однера.

Кроме арифмометра, известны и другие, так называемые «малые счетные машины». В настоящее время в науке и технике приходится иметь дело с очень большими числами и со сложными вычислениями. С этой целью созданы огромные современные электронные счетные машины (рис. 17), которые служат для нужд народного хозяйства и для различных расчетов. Подробнее со счетными машинами учащиеся познакомятся на занятиях кружка (гл. 7, § 7).

4. «Счисление» в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого

В начале XVIII в. по указу Петра I в Москве была открыта математико-навигацкая школа, которая должна была готовить кадры для флота. Единственным авторитетным русским преподавателем этой школы был в то время Леонтий Филиппович Магницкий (1669—1739). Леонтий Филиппович вышел из простого народа и своим упорным трудом достиг вершин математической науки того времени.

Л. Ф. Магницкому было поручено составить руководство для изучения математики в навигацкой школе.

Книга Магницкого «Арифметика, сиречь наука числительная» была напечатана в 1703 г. на славянском языке. В то время она стала энциклопедией математики. В ней были изложены арифметика, основы алгебры, сведения по геометрии, тригонометрии, мореходной астрономии и навигации с необходимыми таблицами и задачами.

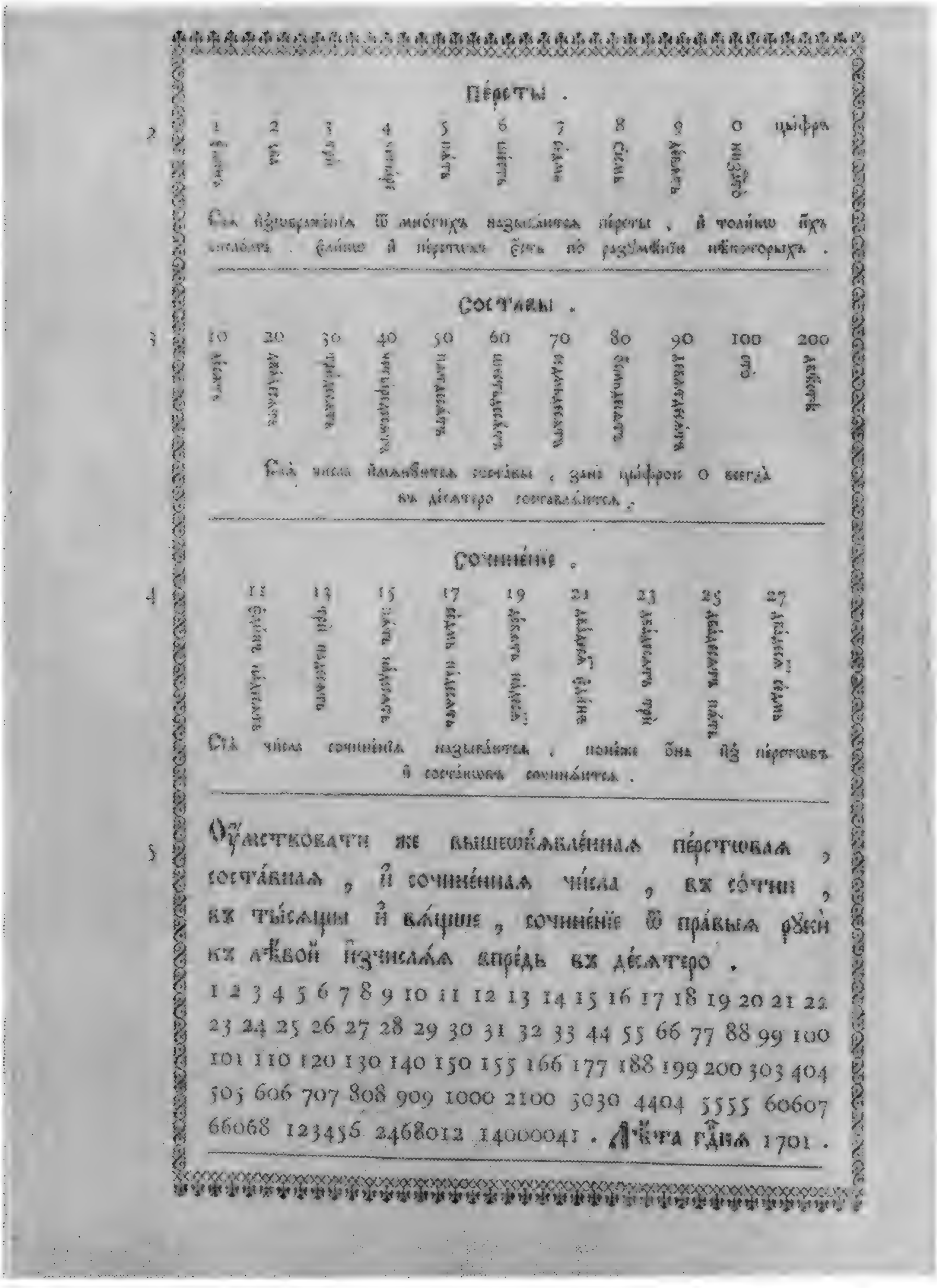
Интересно заметить, что в «Арифметике» выделено как особое действие «нумерацио, или счисление», и рассматривается оно в особом разделе. В нем говорится (в переводе со славянского на русский язык): «Нумерация есть счисление (называние) словами всех чисел, которые изображаемы быть могут десятью такими знаками: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Из них девять значащих; последняя же 0 (которая цифрой или ничем именуется), если стоит одна, то сама по себе значения не имеет. Когда же она присоединяется к какой-нибудь значащей то увеличивает в десять раз, как будет показано в дальнейшем».

Значащие цифры Магницкий именует «знаменованиями» в отличие их от нуля. На рисунке 18 приведена фотография страницы из раздела «Счисления». На ней можно прочитать, что все однозначные числа автор называет «перстами» (пальцами). Числа, составленные из единиц и нулей (например, 10, 40, 700 и т. п.), — «суставами». Все остальные числа (12, 37, 178 и т. д.) — «сочинениями». На этой странице 0 назван уже иначе, чем это было раньше, — он назван «низачто».

Дальше в «Арифметике» дано наименование чисел вида единицы с одним и несколькими нулями. Таблица с названиями круг-

лых чисел доведена до числа с 24 нулями (10^{24}). Затем в стихотворной форме подчеркнуто: «Число есть бесконечно...»

Характерно, что в тексте «Арифметики» Магницкого употребляются цифры современные — арабские, а год издания книги и нумерация листов даны в славянской нумерации. Такое смеше-



Перєты.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 цыфра

Составы.

10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 200

Сочинение.

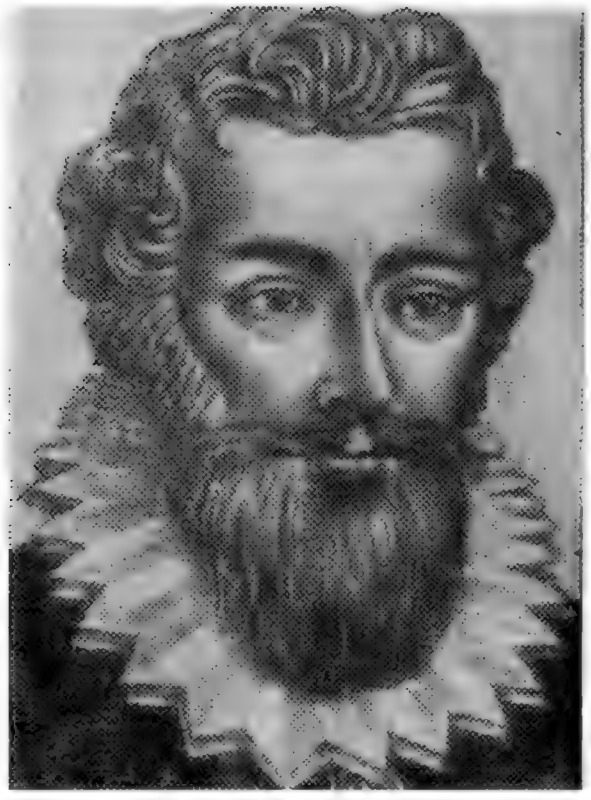
11 13 15 17 19 21 23 25 27

Оумстковати же вышеѡбявленная перстѡвая, составная, и сочиненная числа, въ сотни, въ тысящы и выше, сочинение ѿ правыя руки къ левой изчисляя впредь въ десятеро.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 44 55 66 77 88 99 100 101 110 120 130 140 150 155 166 177 188 199 200 303 404 505 606 707 808 909 1000 2100 3030 4404 5555 60607 66068 123456 2468012 14000041. Лета Гдня 1701.

Рис. 18. Страница из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.

ние той и другой нумераций встречается и в некоторых других книгах, появившихся несколькими годами раньше «Арифметики» Магницкого. Это был период, когда происходила замена устаревшей славянской нумерации на более совершенную — арабскую (индийскую).



Франсуа Виет.

5. Буквы и знаки. Алгебраические выражения

Буквы и различные математические знаки вошли в употребление не сразу, а в результате долгого развития математики. До XV в. все величины и действия, условия и ответы выражались почти только словами. Алгебру тех времен называют поэтому *риторической,* т. е. словесной. Лишь во второй половине XV в. в нескольких странах Европы были введены первые алгебраические символы и положено начало употреблению букв.

В конце XVI в. французский математик Франсуа Виет (1540—1603) ввел буквы для обозначения не только неизвестных, но и любых чисел. Это был решительный шаг для перехода от риторической к новой, *символической* алгебре (см. гл. 5, § 11, 19).

Создание алгебраической символики, происходившее в Италии, Германии, Франции, Нидерландах и Англии, было в основном завершено в XVII в. Однако лишь в первой половине XVIII в. установилась общепринятая система знаков в алгебре.

При решении задач встречаются различные *величины,* они обозначаются различными буквами. Прописная и строчная буква одного наименования, например A и a, обозначают различные величины. Знаки действий с буквами — те же, что и с числами, однако в качестве знака умножения в алгебре редко применяется косой крест, в основном же применяется точка, которая зачастую опускается. Таким образом, если в древности стоящие рядом числа *складывались,* то в современной алгебре числа, представленные рядом стоящими буквами, *умножаются.* В качестве знака деления в алгебре большей частью употребляется горизонтальная дробная черта, реже — двоеточие.

Арифметика учит обращаться с числами и числовыми (арифметическими) выражениями, алгебра же — с буквами и *алгебраическими выражениями,* составленными из цифр, букв и знаков действий. Арифметическое выражение есть частный случай алгебраического. Как и в арифметике, в алгебре употребляются *скобки,* которые определяют порядок действий: сначала вы-

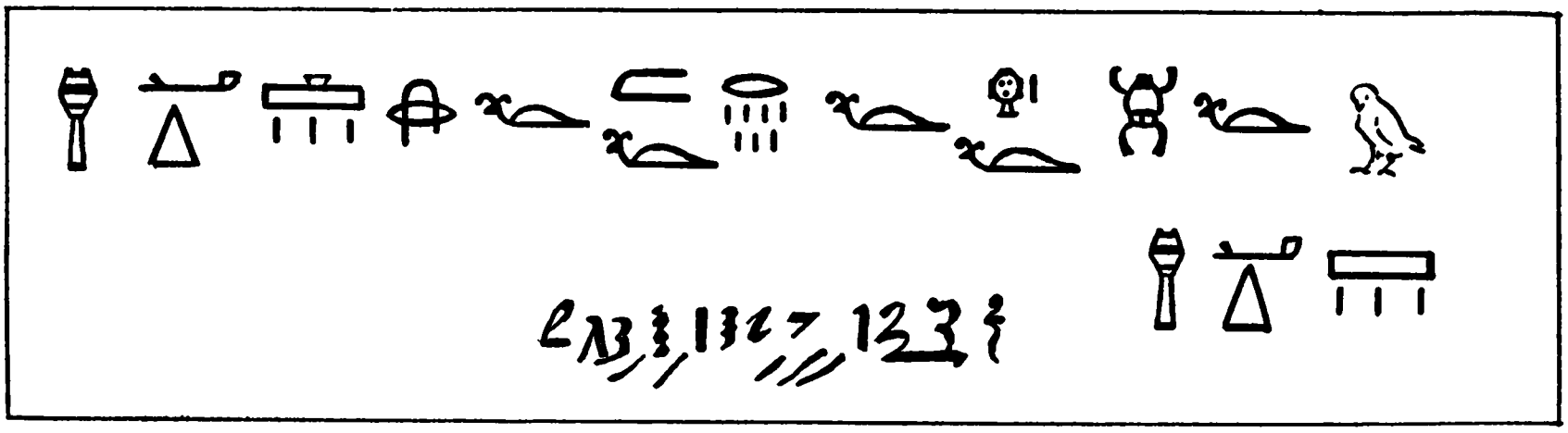


Рис. 19. Древнеегипетская запись уравнения

$$x\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+1\right)=37.$$

Иероглифами (сверху) и иератическим письмом (снизу). Справа — символ неизвестного «хау».

полняются действия, указанные *внутри* скобок. При отсутствии скобок умножение и деление выполняют раньше сложения и вычитания.

Скобки и современный знак равенства встречаются впервые в трудах математиков XVI в. Знаки неравенства $<$ и $>$ были введены в первой половине XVII в. Впервые их ввел английский ученый Гарриот.

6. Из истории уравнений. Метод ложного положения

Уже около 4000 лет назад вавилоняне и египтяне решали разные задачи землемерия, строительства и военного дела с помощью уравнений. Уравнение первой и второй степеней умели решать в древности также китайские и индийские ученые.

Задачи, решаемые с помощью уравнений, встречаются во многих текстах глубокой древности. В Московском папирусе, представляющем свиток, изготовленный из растений, на котором сделаны записи около 1850 г. до н. э., и в папирусе Ахмеса, например, содержатся задачи, в которых неизвестное имеет особый символ (рис. 19) и название: «хау» или «аха». Оно означает «количество», «куча». Так называемое «исчисление кучи», или «вычисление хау», приблизительно соответствует нашему решению задач с помощью уравнений.

Вот пример задачи и ее решения из папируса Ахмеса:

Задача 1. «Количество и его четвертая часть дают вместе 15».

В настоящее время для решения задачи составляется уравнение

$$x+\frac{1}{4}\,x=15.$$

Решая его, находим: $x=12$.

В папирусе Ахмеса решение начинается так: «Считай с 4; от них ты должен взять четверть, а именно 1; вместе 5». Затем 15

делится на 5, частное умножается на 4 и получается неизвестное 12.

Египетский метод решения является по существу методом предположения. Начинают с того, что в качестве неизвестного берут произвольное число, в данном случае 4, так как четверть его, 1, просто вычисляется. Далее $4+1=5$. Однако по условию задачи результат должен быть не 5, а 15, следовательно, во сколько раз 15 больше 5, во столько раз неизвестное должно быть больше произвольно взятого числа 4.

Этот метод широко применялся в Азии и Европе в средние века и получил название «метода ложного положения». Применялся и «метод двух ложных положений», о котором будет идти речь позже (см. гл. 8, § 11).

7. Задача на составление уравнений из Московского папируса

К первым, самым древним задачам на составление уравнений, по-видимому, относятся некоторые задачи, содержащиеся в древнеегипетском Московском папирусе. (Этот папирус хранится в музее изобразительных искусств в Москве. Он изучен и расшифрован русскими учеными.)

Вот одна из задач Московского папируса.

Задача 2. «Число и его половина составляют 9». Найти число.

В современной записи уравнение к решению этой задачи будет иметь вид: $x+\frac{1}{2}x=9$.

8. О происхождении дробей. Дроби в Древнем Риме

Наряду с необходимостью считать предметы у людей с древних времен появилась потребность измерять длину, площадь, объем, время и другие величины. Результат измерения не всегда удается выразить натуральным числом. Приходится учитывать и *части* употребляемой меры. Так возникли *дроби.* Вначале это были *конкретные дроби,* части известных единиц. В Древней Руси, например, «четверть», «осьмина» долгое время означали конкретные дроби, *части* более крупной меры. Медленным и длительным был переход от конкретных к *отвлеченным* дробям, не связанным с определенными мерами. Даже римляне пользовались в основном только конкретными дробями. *Асс,* который у древних римлян служил основной единицей измерения массы, а также денежной единицей, делился на 12 равных частей, *унций.* Со временем унции стали применяться для измерения любых величин. Так возникли римские *двенадцатеричные дроби,* то есть дроби, у которых знаменателем всегда было число 12. Вместо $\frac{1}{12}$

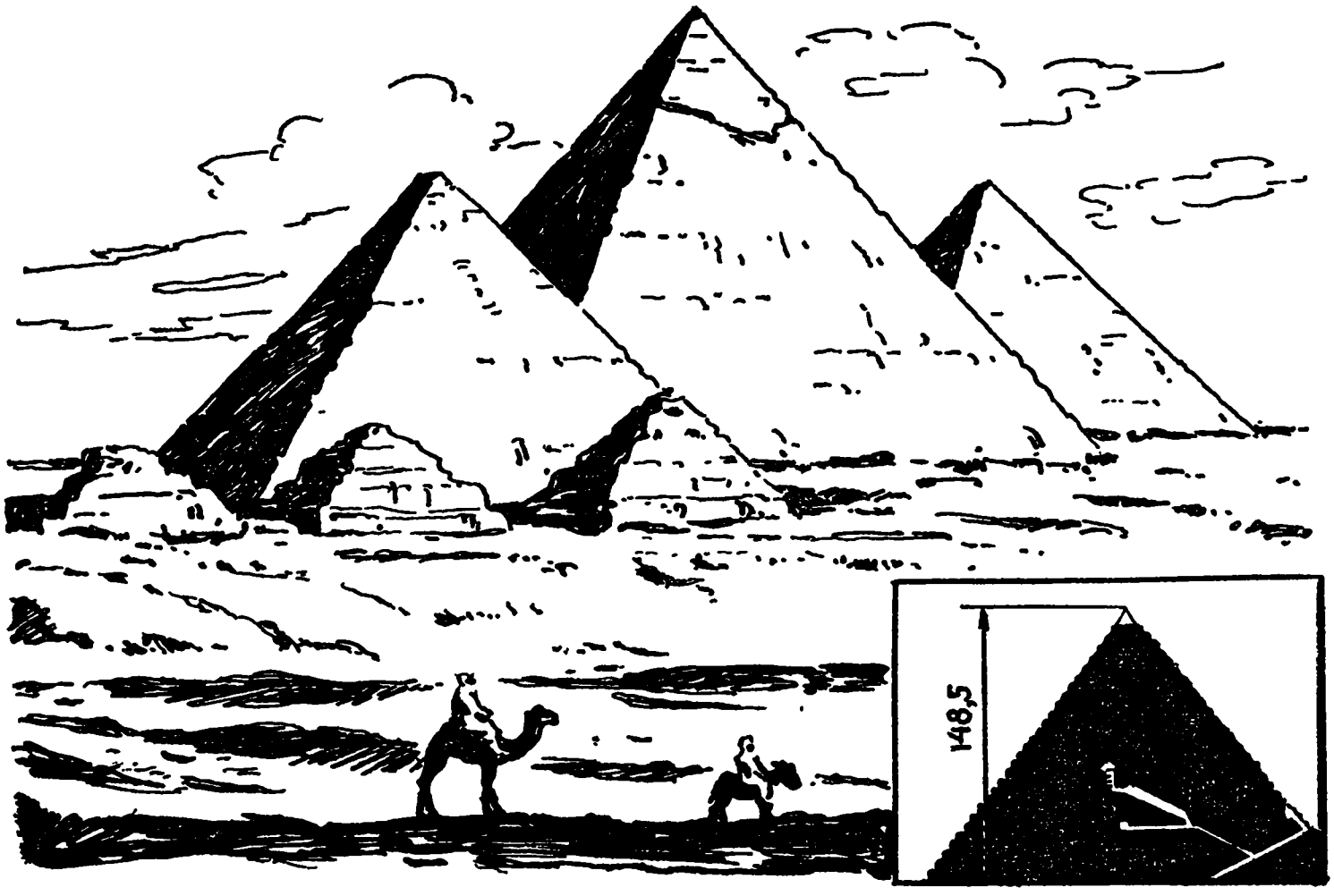


Рис 20. Древнеегипетские пирамиды — гробницы фараонов. Высота самой большой из них, пирамиды Хеопса (III в. до н. э.) — 146 м.

римляне говорили «одна унция», $\frac{5}{12}$ — «пять унций» и т. д. Три унции назывались четвертью, четыре унции — третью, шесть унций — половиной.

Характерен следующий отрывок из произведения знаменитого римского поэта I в. до н. э. Горация о беседе учителя с учеником в одной из римских школ этой эпохи:

«Учитель. Пусть скажет Сын Альбина, сколько останется, если от 5 унций отнять 1 унцию?

Ученик. Одна треть.

Учитель. Правильно, ты сумеешь беречь свое имущество».

9. Дроби в Древнем Египте

Первая дробь, с которой познакомились люди, была, наверное, половина. За ней последовали $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ..., затем $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, и т. д., т. е. самые простые дроби, доли целого, называемые *единичными* или *основными* дробями. У них числитель всегда единица. Некоторые народы древности, например египтяне, выражали любую дробь в виде суммы только основных дробей[1]. Лишь значительно позже у греков, затем у индийцев и других народов стали входить в употребление и дроби общего вида, называемые обыкновенными, у которых числитель и знаменатель могут быть любыми натуральными числами.

[1] Исключение составляла дробь $\frac{2}{3}$, см. гл. 9, § 14, задача 54.

В Древнем Египте архитектура достигла высокого развития. Об этом свидетельствуют сохранившиеся до наших дней египетские пирамиды (рис. 20). Разумеется, для того чтобы строить грандиозные пирамиды и храмы, чтобы вычислять длины, площади и объемы фигур, необходимо было знать арифметику.

Египтяне писали на папирусах, т. е. на свитках, изготовленных из стебля крупных тропических растений, носивших то же название. Самым древним математическим папирусом, дошедшим до нас, является так называемый Московский папирус, написанный около 1850 г. до н. э. Длина его около 5,5 м, а ширина 8 см. Хранится он в Московском Музее изобразительных искусств. Его изучили и расшифровали русские ученые, академики Тураев Борис Александрович (1868—1920) и Струве Василий Васильевич (1889—1965). Важнейшим по содержанию является папирус Ахмеса, названный так по имени одного из древнеегипетских писцов, рукою которого он был написан (рис. 21, 22 и 23). Его длина 544 см, а ширина 33 см; хранится он в Лондоне, в Британском музее. Он был приобретен в прошлом веке англичанином Риндом и поэтому называется иногда папирусом Ринда. Этот старинный математический документ озаглавлен так: «Способы, при помощи которых можно дойти до понимания всех темных вещей, всех тайн, заключающихся в вещах».

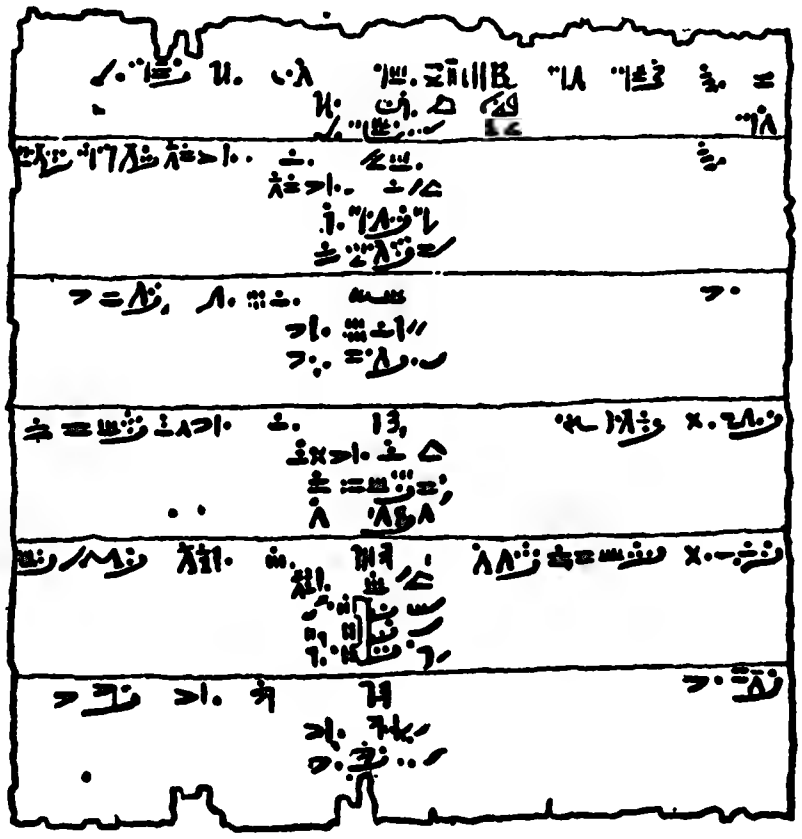


Рис. 21. Обрывок папируса Ахмеса.

Рис. 22. Египетская иероглифическая нумерация. Число 35 736.

Рис. 23. Древнеегипетский писец. Статуя (III тысячелетие до н. э.) хранится в Луврском музее Парижа.

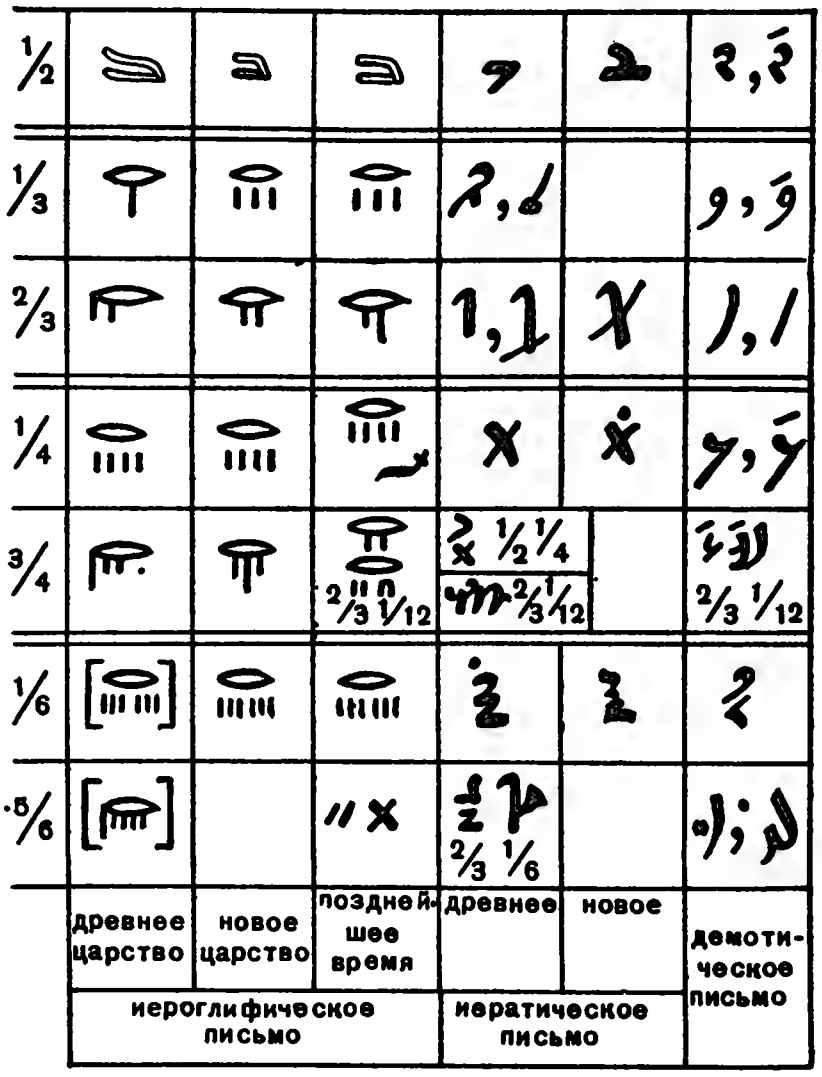


Рис. 24. Запись дробей в Египте.

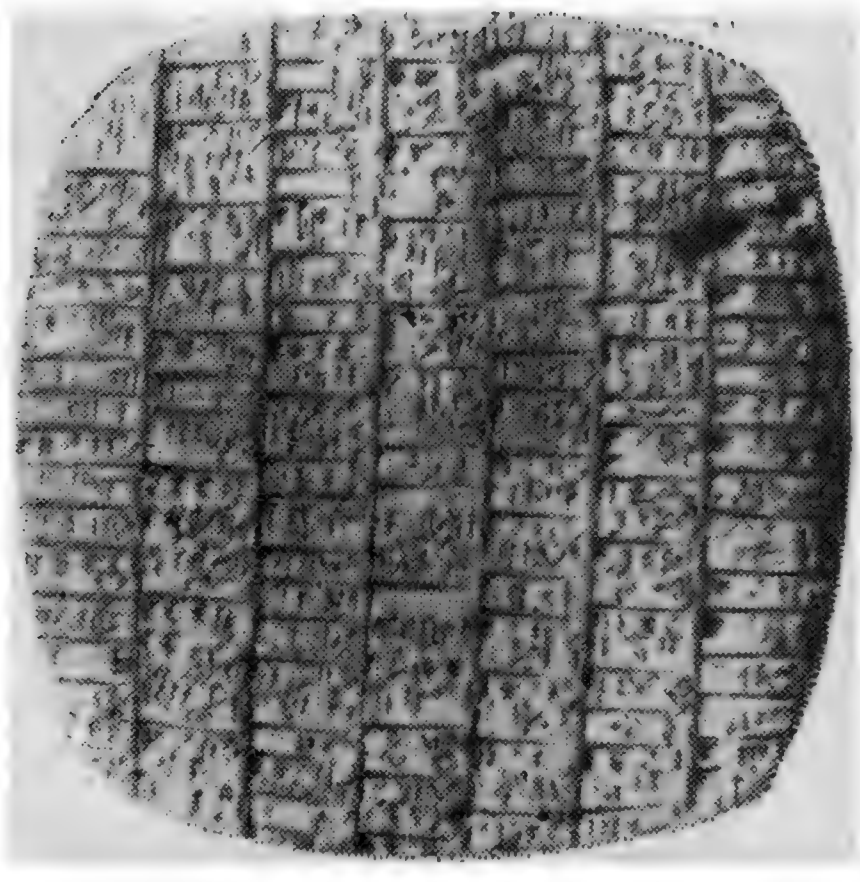


Рис. 25. Вид древневавилонской клинописной таблицы.

После того как ученые расшифровали эти и другие папирусы, люди узнали, что египтяне 4000 лет назад имели десятичную (но не позиционную) систему счисления, умели решать многие задачи, связанные с потребностями строительства, торговли и военного дела.

Вот как записывали египтяне свои дроби (рис. 24) [1]. Если, например, в результате измерения получалось дробное число $\frac{3}{4}$, то для египтян оно представлялось в виде суммы единичных дробей: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Итак, не три четверти целого брали египтяне, а одну вторую да еще одну четверть. В папирусе Ахмеса имеются таблицы для представления некоторых дробей в виде суммы единичных дробей.

Задание ученикам. Проверить следующие представления дробей, приведенные в папирусе Ахмеса:

$$1.\ \frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$$

$$2.\ \frac{2}{7}=\frac{1}{6}+\frac{1}{14}+\frac{1}{21}.$$

$$3.\ \frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}.$$

$$4.\ \frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}.$$

[1] Древнейший вид египетского письма — иероглифический. Начиная с эпохи Древнего Царства (3000—2400 до н. э.) до Нового Царства (1580—1071) пользовались более схематическим письмом — иератическим. С конца VIII в. до н. э. распространилось демотическое письмо. См. гл. 7, § 5.

10. Вавилонская нумерация. Шестидесятеричные дроби

В Древнем Вавилоне высокий уровень культуры был достигнут еще в третьем тысячелетии до н. э. Шумеры и аккадцы, населявшие Древний Вавилон, писали не на папирусе, который в их стране не рос, а на глине. Путем нажима клиновидной палочкой на мягкие *глиняные плитки* наносились знаки, имевшие вид клиньев. Вот почему такое письмо называется *клинописью.* Плитки сушились на знойном солнце и приобретали прочность. Раскопками, проведенными в XX в. среди развалин древних городов южной части Двуречья, обнаружено большое количество клинописных математических табличек (рис. 25) [1]. Ученые, изучая их, установили, что за 2000 лет до н. э. у вавилонян математика достигла высокого уровня развития. Письменная шестидесятеричная нумерация вавилонян комбинировалась из двух значков: вертикального клина ▼ , обозначавшего единицу, и углового знака ◄ , обозначавшего десять (рис. 26). В вавилонских клинописных текстах впервые встречается позиционная система счисления. Вертикальный клин ▼ обозначал не только 1, но и 60, 60^2, 60^3 и т. д. Чтобы написать, например, 62, приписывали справа знака ▼ (60) знаки ▼▼ (2), оставляя при этом известный промежуток: ▼ ▼▼ . Знака для нуля в позиционной шестидесятеричной системе у вавилонян вначале не было. Означает ли вертикальный клин ▼ единицу, или 60, или 60^n, можно было определить лишь в связи с содержанием тех или иных задач. Вавилонская нумерация не была таким образом строго позиционной, не была абсолютной. Позже был введен знак ⧗ , заменявший современный нуль, для отделения разрядов между собой [2]. Вот как записывалось, например, число

---

[1] В первой половине нашего века французский ассириолог Ф. Тюро-Данжен, немецкий историк математики Отто Нейгебауэр и другие ученые расшифровали и опубликовали много вавилонских табличек.

[2] Предполагается, что этот значок появился лишь в V в. до н. э. До этого вместо него в известных случаях практиковали оставлять пробел между разрядами.

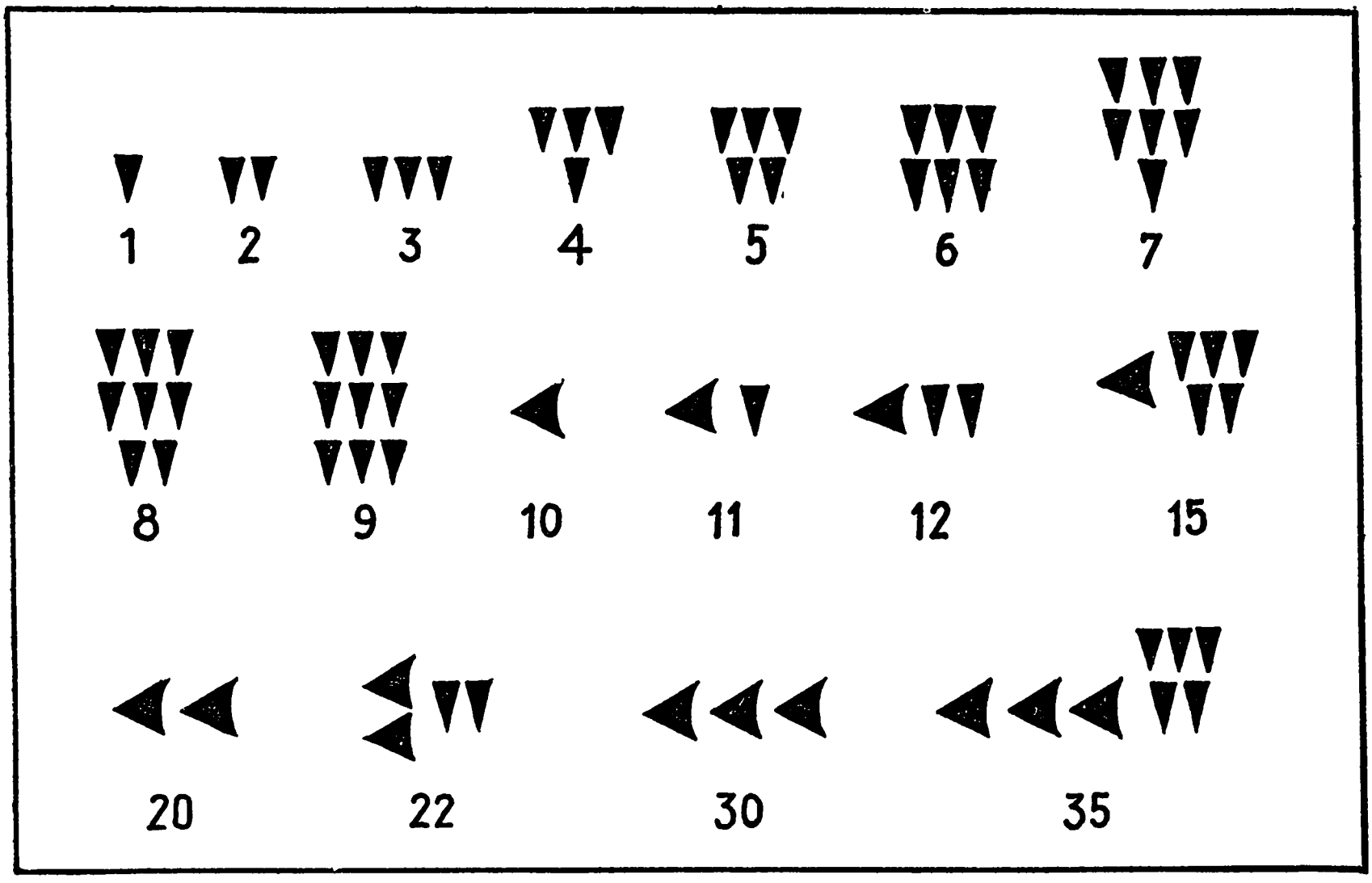


Рис. 26. Вавилонские цифры и числа.

3605 (рис. 27). Однако знак никогда не ставился в конце числа.

Происхождение шестидесятеричной системы счисления у вавилонян[1] связано, как полагают некоторые ученые, с тем, что вавилонская денежная и весовая единицы измерения подразделялась в силу исторических условий на 60 равных частей:

1 талант = 60 мин,

1 мина = 60 шекель.

Шестидесятые доли были привычны в жизни вавилонян. Вот почему они пользовались *шестидесятеричными* дробями, имеющими знаменателем всегда число 60, или его степени: $60^2 = 3600$; $60^3 = 216\,000$ и т. д. В этом отношении шестидесятеричные дроби можно сравнить с нашими десятичными дробями.

Вавилонская математика оказала влияние на греческую математику. Следы вавилонской шестидесятеричной системы счисления удержались и в современной науке при измерении времени и углов. До наших дней сохранилось деление часа на 60 мин, минуты на 60 с; окружности на 360 градусов, градуса на 60 мин, минуты на 60 с.

Минута означает по-латыни «маленькая часть», секунда — «вторая» (маленькая часть).

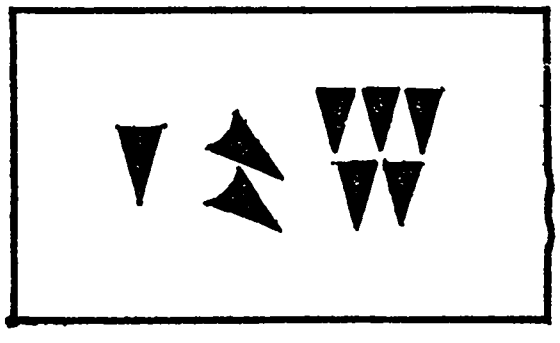


Рис. 27. Вавилонская клинописная запись числа $3605 \cdot (60 \cdot 60 + 0 + 5)$.

[1] По этому вопросу существуют различные предположения. Подробнее см. гл. 7, § 5.

Вавилоняне внесли ценный вклад в развитие астрономии. Шестидесятеричными дробями пользовались в астрономии ученые всех народов до XVII в., называя их *астрономическими* дробями. В отличие от них, дроби общего вида, которыми пользуемся мы, были названы *обыкновенными.*

Упражнения: а) Выразить в шестидесятеричных дробях следующие обыкновенные дроби: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$.

б) Выразить в обыкновенных дробях следующие шестидесятеричные дроби:

$$\frac{18}{60};\quad \frac{3250}{3600};\quad \frac{148000}{60^3}.$$

в) Выразить в минутах $\frac{2}{5}$ часа.

г) Выразить в дробях (превратить в часы) 15 мин и 12 с.

11. Нумерация и дроби в Древней Греции

В Древней Греции, высокая культура которой приобрела мировое значение, существовали две системы письменной нумерации: *аттическая* и *ионийская,* или *алфавитная* (рис. 28). Они были так названы по древнегреческим областям — Аттика (на юго-

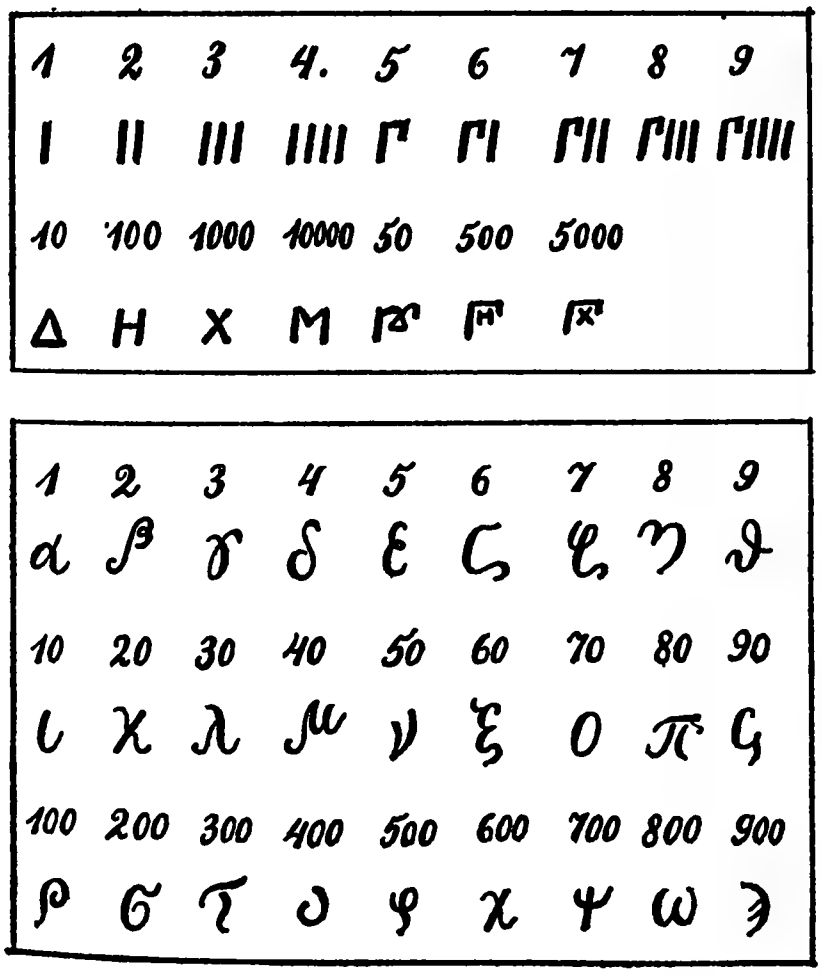


Рис. 28. Древнегреческая аттическая (сверху) и алфавитная (снизу) нумерация.

Рис. 29. Ваза персидского царя Дария (III в. до н. э.), хранящаяся в Неаполитанском музее (Италия).

Рис. 30. Деталь вазы Дария (рис. 29). Поступившие налоги подсчитываются на счетной доске. Аттическими цифрами записаны числа 10 000, 1000, 10, 5 и др.

востоке Средней Греции) и Иония (часть побережья Малой Азии). В аттической системе, названной также *геродиановой*[1], большинство числовых знаков являются первыми буквами греческих соответствующих числительных, например ΓΕΝΤΕ (генте или пенте) — пять, ΔΕΚΑ (дека) — десять и т. д. (рис. 29, 30). Эту систему применяли в Аттике до I в. н. э., но в других областях Древней Греции она была еще раньше заменена более удобной алфавитной нумерацией (рис. 8), быстро распространившейся во всей Греции.

Книга греческого ученого Никомаха «Введение в арифметику», написанная в I в н. э., является первым дошедшим до нас систематическим учебником арифметики, которым более тысячи лет пользовались в школах Европы.

В Греции употреблялись наряду с единичными, «египетскими» дробями и общие, обыкновенные дроби. Среди разных записей употреблялась и такая: сверху знаменатель, под ним — числитель дроби. Например, $\frac{5}{3}$ означало три пятых[2]. Еще за 2—3 столетия до Евклида и Архимеда греки свободно владели арифметическими действиями с дробями. В VI в. до н. э. жил знаменитый ученый Пифагор.

З а д а ч а 3. «Рассказывают, что на вопрос, сколько учеников посещают его школу, Пифагор ответил: «Половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании, кроме этого, есть три женщины». Сколько учеников посещало школу Пифагора?»

12. Нумерация и дроби на Руси

Как свидетельствуют старинные памятники русской истории, наши предки-славяне, находившиеся в культурном общении с Византией[3], пользовались десятичной алфавитной славянской

[1] По имени греческого грамматика II в. н. э. Геродиана, описавшего аттическую систему.

[2] Подробнее см. гл. 7, § 6.

[3] Византия (Византийская империя) — государство, возникшее в IV в. в восточной части Римской империи. В состав Византии входили Греция, Малая Азия, Сирия, Египет и др.

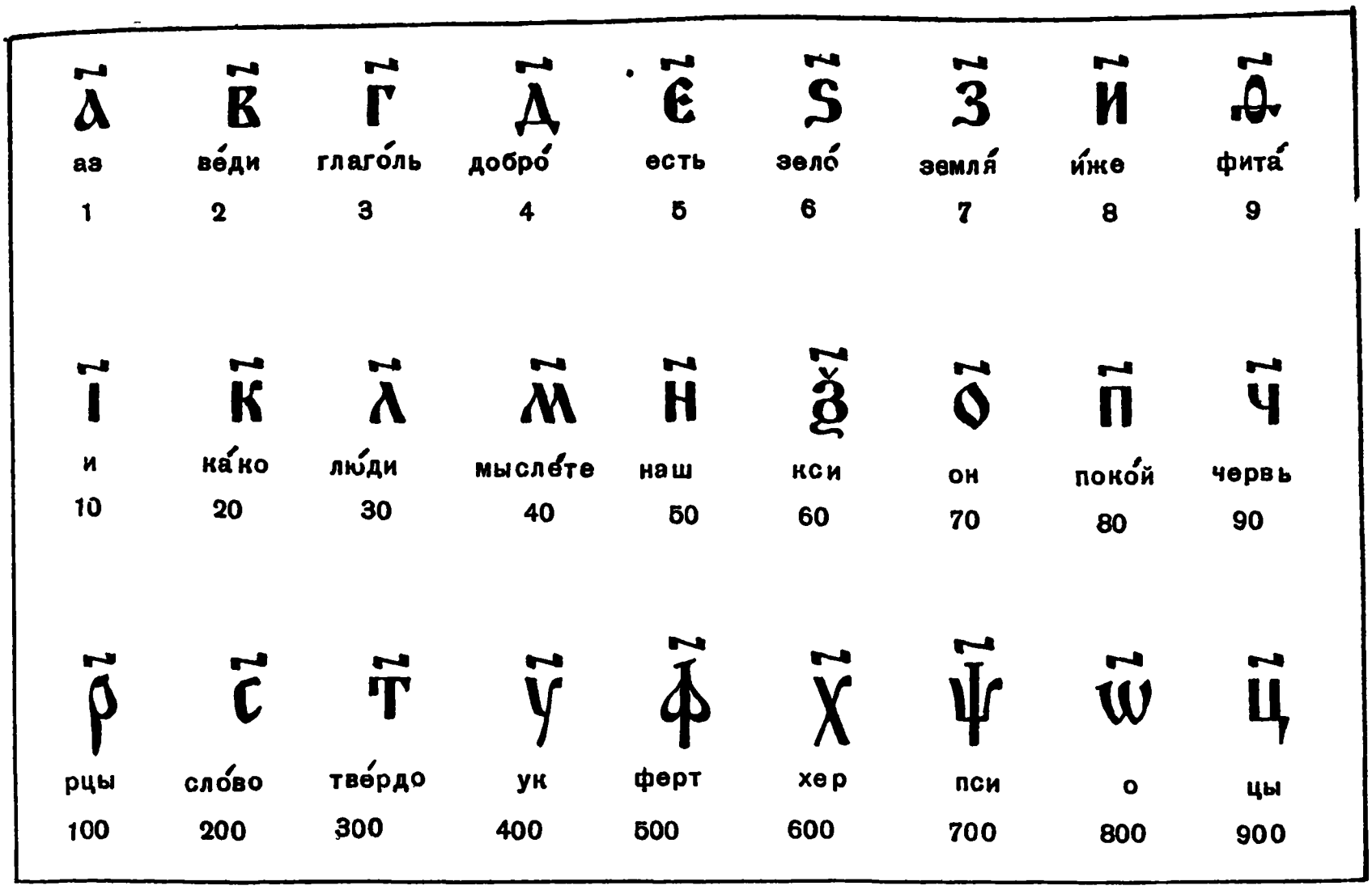


Рис. 31. Славянская алфавитная нумерация. Над буквами ставится знак, называемый «титло».

нумерацией (рис. 31), сходной с ионийской (см. рис. 28). Над буквами-числами ставился особый знак ▬ , названный титло. Для обозначения тысячи применялся другой знак ʹ , который приставлялся слева от букв. Так, ͵г означало 3, ʹ͵г —3000 и т. п.. Так можно было обозначать целые числа до 1 миллиона.

Старейшим арифметическим памятником Киевской Руси является сочинение о календаре, написанное на славянском языке в 1136 году и названное «Учение им же ведати человеку числа всех лет», т. е. «Наставление, как человеку познать счисление лет» (рис. 32) [1].

[1] Перевод этой страницы: «а от последнего обновления прошло 4 года.

12. На каком году обновляется море. Море обновляется через 60 лет. Таких обновлений в том же количестве лет было 110, от последнего обновления прошло 44 года.

13. Обновление воды. Воды обновляются через 70 лет. Таких обновлений было от Адама до настоящего времени 94 и еще останется 64 [года].

14. О високосных годах. Високосный год бывает на 4-й год. Таких високосных лет было от Адама 1660 и еще один год, високосный, нынешний.

15. О большом круге. Большой же круг содержит 532 года. Таких кругов от Адама минуло 12, а 13-го прошло 260 лет.

16. Сообщается, сколько месяцев в году. Да будет известно, что в одном году 12 календарных месяцев, а небесных лунных месяцев 12 и 11 дней 13-й луны. И из этих дней...»

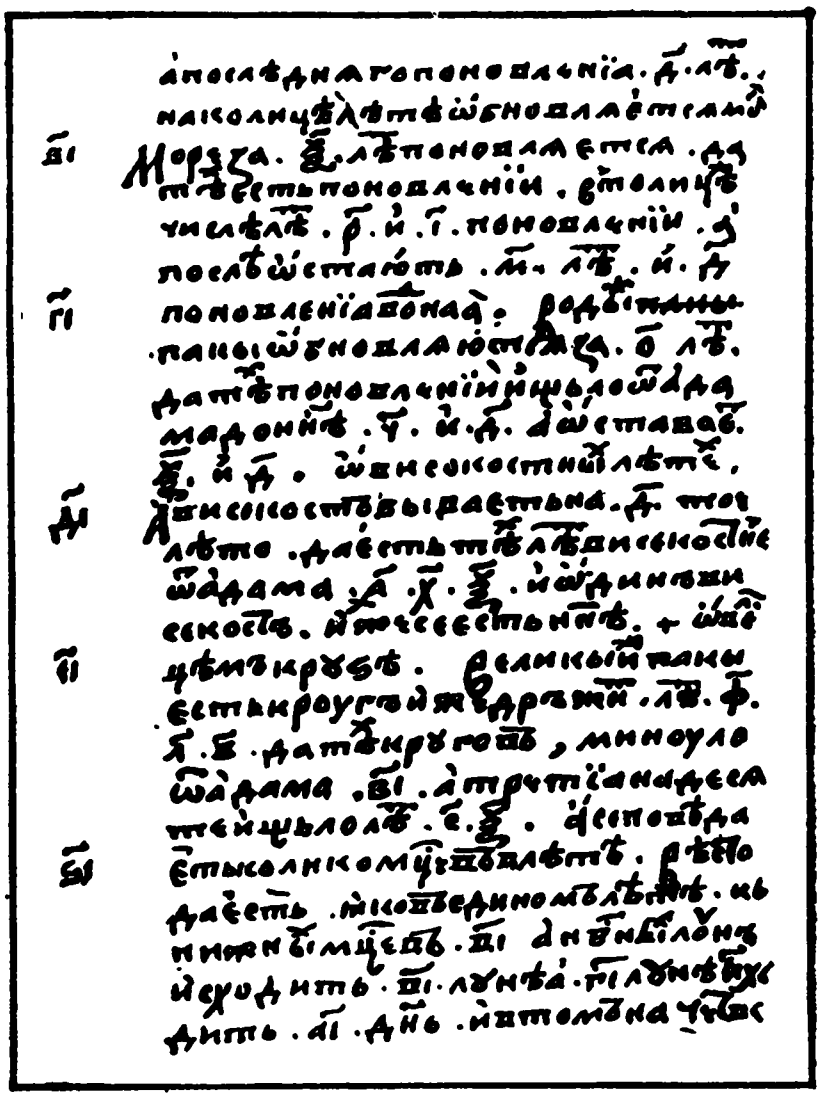


Рис. 32. Страница из «Наставления» Кирика Новгородского.

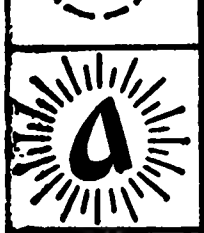
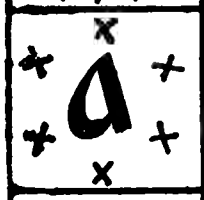
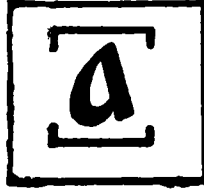
	10^3	тысяща
	10^6	тьма
	10^{12}	легеон
	10^{24}	леодр
	10^{48}	ворон
	10^{49}	колода

Рис. 33. Обозначения больших чисел у славян.

Автор сочинения — ученый монах Кирик Новгородец, о жизни которого известно немного. В календарном счете Кирик пользуется конкретными дробями, «дробными числами»: 1/5, 1/25, 1/125 и т. д.[1].

В русских рукописных арифметиках XVII в. употребляются следующие наименования чисел: 10 000 — тьма, 100 000 — легион, 1 000 000 — леодр. Эта система наименований называлась «малым числом». В тех же рукописях встречается и другая система, так называемое «великое число», в которой большие числа обозначались и назывались, как показано на рисунке 33.

Дроби в Древней Руси называли долями, позднее «ломаными числами». В старых руководствах находим следующие названия дробей на Руси:

$\frac{1}{2}$ — половина, полтина, $\frac{1}{3}$ — треть,

$\frac{1}{4}$ — четь, $\frac{1}{6}$ — полтреть,

$\frac{1}{8}$ — полчеть, $\frac{1}{12}$ — полполтреть,

[1] По мнению В. П. Зубова, счет по $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$ и т. д. оригинальное русское явление, не имеющее аналогов в других календарных вычислениях.

$\frac{1}{16}$ — полполчеть,

$\frac{1}{24}$ — полполполтреть (малая треть),

$\frac{1}{32}$ — полполполчеть (малая четь)

$\frac{1}{5}$ — пятина,

$\frac{1}{7}$ — седьмина,

$\frac{1}{10}$ — десятина[1].

Славянская нумерация употреблялась в России до XVI в., лишь в этом веке в нашу страну постепенно стала проникать десятичная позиционная система счисления[2]. Она окончательно вытеснила славянскую нумерацию при Петре I.

§ 2. ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

13. Возникновение и совершенствование мер длины. О метрической системе мер

С незапамятных времен человеку приходилось измерять расстояния в связи с изготовлением простейших орудий труда, со строительством жилищ и с добыванием пищи. Подобно тому как при счете человек пользовался вначале пальцами рук и ног, так и при измерении расстояний он прибегал к рукам и ногам. Вот почему в прошлом мерами длины служили (да иногда и теперь еще служат) *шаг, ладонь* — ширина кисти руки (рис. 34), *локоть* — расстояние от локтя до конца среднего пальца и т. п. Названия мер у разных народов свидетельствуют об их происхождении от различных частей человеческого тела. Так, например, слово *дюйм* (английская, а также старая русская мера длины $\sim 2{,}5$ см) означает на голландском языке «большой палец». Слово *фут* (старая мера длины $\sim 30{,}5$ см) означает в английском языке «нога». Эта мера длины возникла как средняя длина ступни человека (рис. 35).

С развитием производства и торговли люди убедились в том, что не всегда удобно измерять расстояния шагами или прикла-

---

[1] «Десятиной» называлась и русская мера земельной площади, приблизительно равная 1,09 га, применявшаяся в нашей стране до введения метрической системы мер.

[2] В древнейшем русском юридическом сборнике XIV—XV вв., известном под названием «Русская правда», фигурирует славянская нумерация. От XVI в. до нас не дошла ни одна рукопись математического содержания. В рукописях XVII в. применяется уже десятичная позиционная нумерация, а славянская нумерация играет лишь подсобную роль.

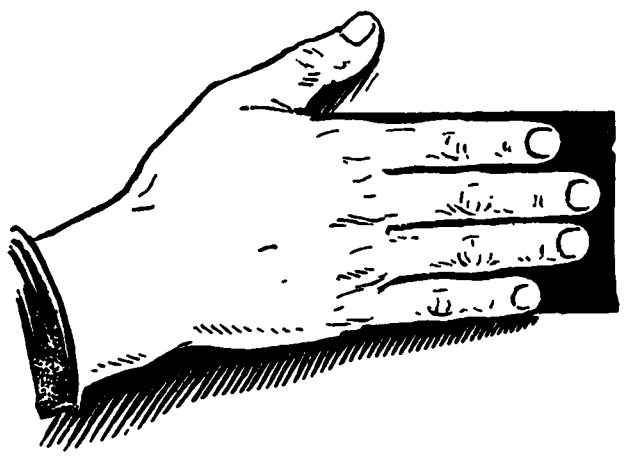


Рис. 34. Ладонь, равная четырем пальцам.

Рис. 35. Происхождение меры фут.

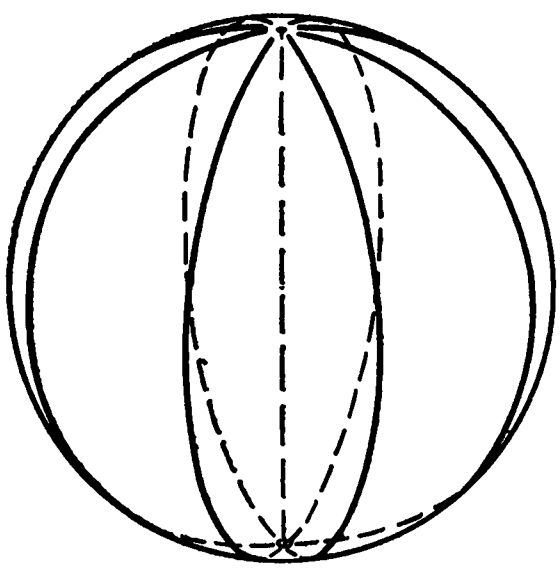


Рис. 36. Меридианы.

дыванием локтя. Кроме того, такое измерение уже не удовлетворяло возросшим требованиям точности. В самом деле, длина локтя или шага у разных людей различна, а мера длины должна быть постоянной. Постоянные образцы мер стали изготовлять из деревянных линеек и металлических стержней. Образцы мер в настоящее время называются *эталонами.* Старой русской мерой длины был *аршин* (от персидского слова «арш»—локоть) ~ ~71 см. Отсюда поговорка «Мерить на свой аршин» и др. Аршин делился на 16 вершков. 3 аршина составляли сажень, 500 саженей — версту, 7 верст — милю. Таким образом, при раздроблении и превращении приходилось умножать, соответственно делить на разные числа: 16, 3, 500, 7... Между тем практика измерений и вычислений показала, что проще и удобнее пользоваться, такими мерами, у которых отношение двух ближайших единиц длины было бы *постоянным* и равнялось бы именно *десяти* — основанию нумерации. Метрическая система мер отвечает этим требованиям.

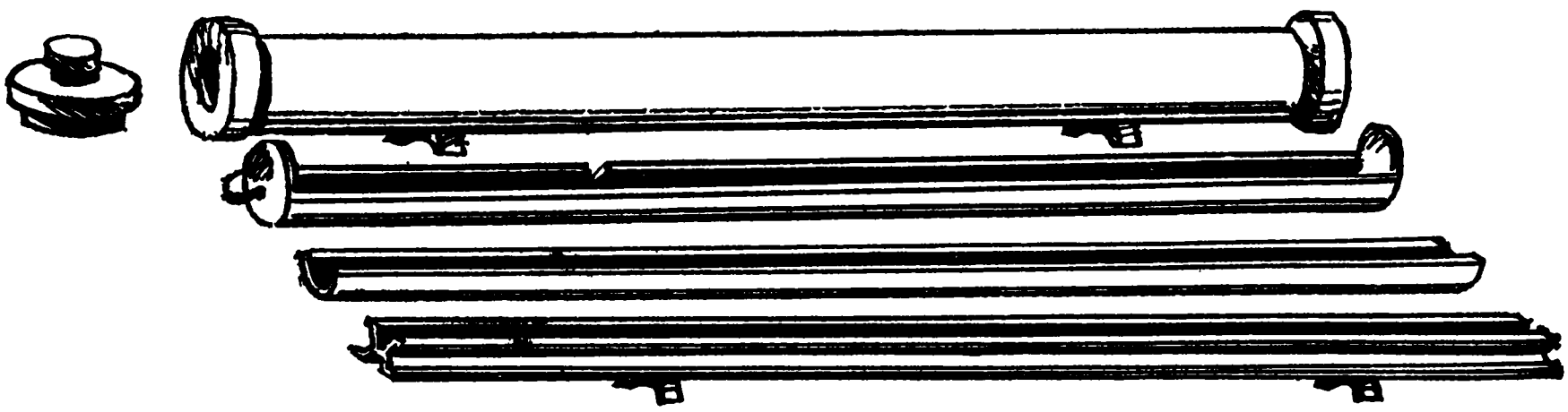


Рис. 37. Эталон метра и футляры, в которых он хранится.

Но где и когда родилась эта система?

В конце XVIII в. во Франции произошла буржуазная революция, которая ликвидировала господствовавшие феодальные отношения и свергла деспотическую королевскую власть. Неточность старых мер была выгодна для феодалов, так как они могли, получая оброк с крестьян, измерять его более емкими мерами, а расплачиваться с ними своими меньшими мерами. В то же время отсутствие единых мер препятствовало развитию торговли между городами и государствами, тормозило развитие ремесел, что особенно невыгодно было буржуазии.

Ж. Б. Ж. Деламбр.

П. Ф. Мешен.

Революция, поставившая у власти буржуазию, дала толчок к созданию новой общей системы мер.

Новые меры должны были удовлетворять следующим требованиям: 1) основой общей системы мер должна быть единица длины; 2) меры длины, площади, объема, вместимости и веса должны быть связаны между собой; 3) основную меру длины следовало выбрать так, чтобы она была постоянной «для всех времен и для всех народов»; 4) основанием системы мер необходимо было взять число, равное основанию системы счисления.

Какую же длину приняли французские ученые за основную меру? Известно, что Земля почти шарообразна. Большие окружности, проходящие через полюсы, — это земные меридианы (рис. 36). Четверть меридиана (расстояние от полюса до экватора) была определена и разделена на 10 000 000. Одну десятимиллионную часть четверти земного меридиана во Франции приняли за основную меру длины и назвали *метром* (от греческого слова «метрон», означающего «мера»). На основании измерений меридиана, сделанных французскими учеными Мешеном и Деламбром, был изготовлен впоследствии платиновый эталон метра [1]. Число 10 лег-

[1] О трудностях, встречавшихся при измерении меридиана, и о проявленном при этом мужестве ученых см. Депман И. Я. Возникновение системы мер и способов измерения величин. М., 1956.

Б. С. Якоби.

Д. И. Менделеев.

ло в основу подразделений метра. Вот почему метрическая система мер оказалась тесно связанной с *десятичной* системой счисления и с *десятичными* дробями. Единица измерения площадей — *квадратный метр,* объемов — *кубический метр.*

Мера веса и другие были связаны с мерой длины таким образом: за основную меру веса[1] принят *килограмм,* равный весу 1 дм³ воды при температуре 4°, т. е. при наибольшей плотности. Основная мера вместимости — литр, равный по объему одному кубическому дециметру. Благодаря своим преимуществам метрическая система мер распространилась во второй половине XIX в. далеко за пределы Франции. За введение в России этой системы выступил, в частности, и член Петербургской Академии наук Борис Семенович Якоби. В 1875 г. в Париж собрались на конференцию представители двадцати государств подписать конвенцию (соглашение) метра для обеспечения международного единства и совершенствования метрической системы. Было учреждено Международное Бюро мер и весов. Международные прототипы, т. е. эталоны метра (рис. 37) и килограмма, хранятся в Париже. Важнейший вклад в метрологию, т. е. учение о мерах, внес великий русский химик Дмитрий Иванович Менделеев (1834—1907), который ценой больших усилий добился в 1889 г. разрешения на необязательное введение в России метрической системы мер. Обязательной же для нашей страны она стала лишь после Великой Октябрьской социалистической революции, с 1918 г. Копии международных эталонов хранятся в Ленинграде (см. гл. 7, § 4).

---

[1] На практике между массой и весом долгое время не делали различия, поэтому килограмм применяли для измерения веса, а также его принимали за единицу массы. Разграничение единицы массы и веса установлено в 1901 г. За единицу массы килограмм в настоящее время по системе СИ принимают массу прототипа, хранящегося в Международном бюро мер и весов.

14. Происхождение десятичных дробей

К десятичным дробям математики пришли в разные времена в Азии и в Европе.

Зарождение и развитие десятичных дробей в некоторых странах Азии было тесно связано с метрологией (учением о мерах). Уже во II в. до н. э. там существовала десятичная система мер длины.

Примерно в III в. н. э. десятичный счет распространился на меры массы и объема. Тогда и было создано понятие о десятичной дроби, сохранившей, однако, метрологическую форму.

Вот, например, какие меры массы существовали в Китае в X в.: 1 лан = 10 цянь = 10^2 фэнь = 10^3 ли = 10^4 хао = 10^5 сы = 10^6 хо.

Если вначале десятичные дроби выступали в качестве метрологических, *конкретных* дробей, десятых, сотых и т. д. *частей* более крупных мер, то позже они по существу стали все более приобретать характер отвлеченных десятичных дробей. Целую часть от дробной стали отделять особым иероглифом «дянь» (точка). Однако в Китае как в древние, так и в средние века десятичные дроби не имели полной самостоятельности, оставаясь в той или иной мере связанными с метрологией [1].

Более полную и систематическую трактовку получают десятичные дроби в трудах среднеазиатского ученого ал-Каши в 20-х годах XV в. Независимо от него, в 80-х годах XVI в. десятичные дроби были «открыты» заново в Европе нидерландским математиком С. Стевином.

В Средней Азии и в Европе ученые пришли к десятичным дробям по аналогии с шестидесятеричными и разработали теорию десятичных дробей.

15. От шестидесятеричных к десятичным дробям. Ал-Каши

Шестидесятеричные дроби вавилонян (см. гл. 1, § 1; 10) имели следующие преимущества: 1) действия над дробями производились по тем же правилам, как и над целыми числами; 2) основание мер и нумерации было одно и то же — 60. Поэтому употребление шестидесятеричных дробей значительно упрощало вычисления при решении практических задач.

В восточноарабских государствах некоторые весовые и денежные единицы также подразделялись на шестьдесят меньших единиц, например 1 диргем = 60 ашир. В связи с этим на практике часто употреблялись шестидесятеричные доли. В астрономии, начиная с X — XI вв., применялась уже более совершенная, чем

---

[1] Наиболее полное развитие система дробных десятичных разрядов получила в XIII—XIV вв. Математики этого периода извлекали корни в десятичных дробях и переводили обыкновенные дроби в десятичные, доводя иногда вычисления до 16 десятичных знаков. Каждый разряд имел особое название.

Рис. 38. Остатки обсерватории Улугбека. Дуга большого радиуса, разделенная на градусы.

древневавилонская, *полная* позиционная шестидесятеричная нумерация с особым значком для нуля.

В средние века ученые пользовались десятичной нумерацией для вычислений с *целыми* числами, а шестидесятеричной — для вычислений с *дробями* в астрономии и других отраслях науки. Это породило трудности, связанные с переходом от одного основания к другому.

Нелегко усваивались обыкновенные дроби. Вообще дроби считались самым трудным разделом арифметики. Поныне у немцев осталась поговорка «Попал в дроби», т. е. попал в трудное положение.

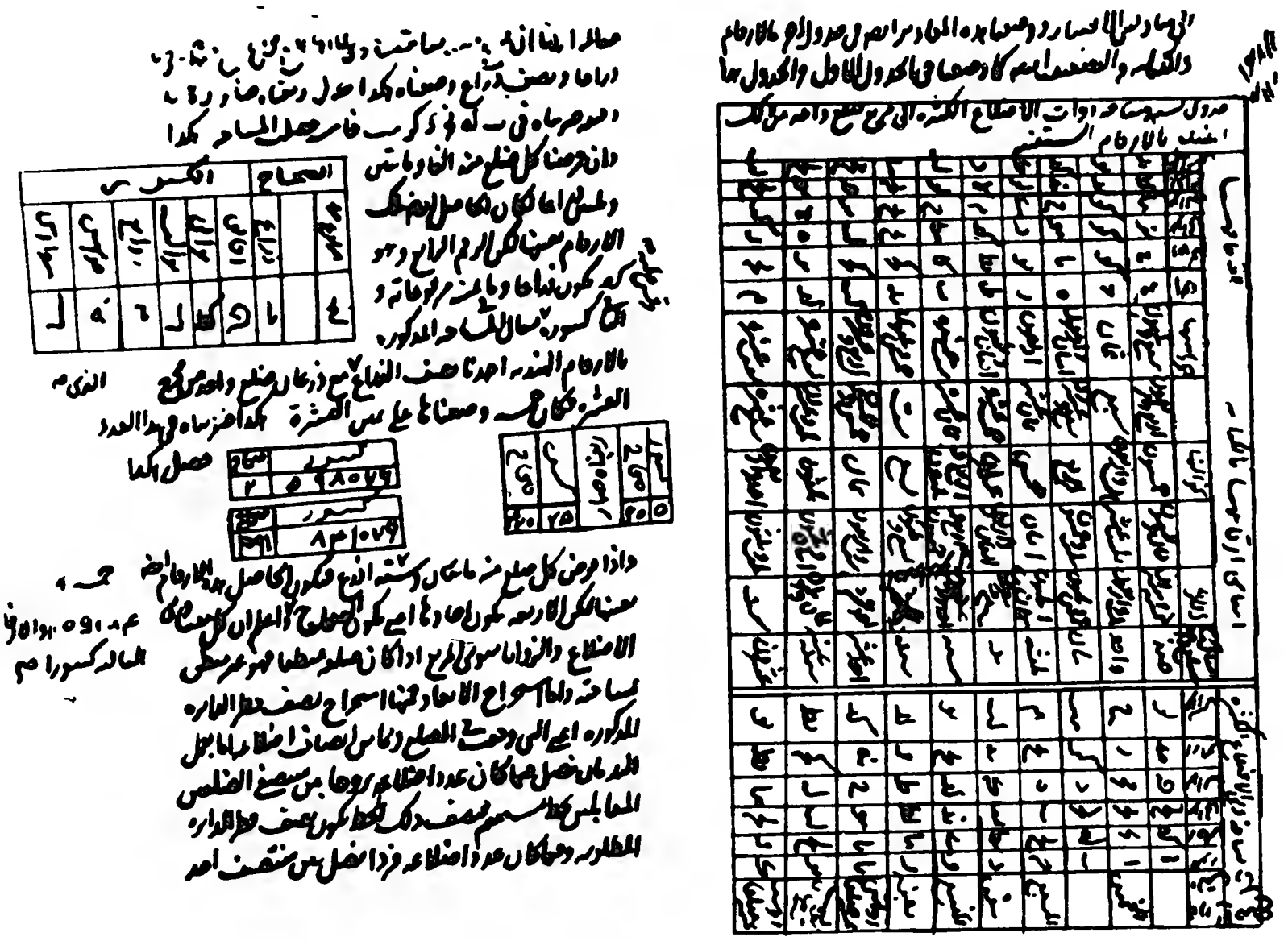


Рис. 39. Страница из «Ключа арифметики» ал-Каши.

Идея шестидесятеричных дробей, идея одинакового систематического подразделения целого на одни и те же доли, с одной стороны, и десятичная нумерация — с другой, привели к мысли о *десятичных* дробях.

Среднеазиатский город Самарканд (ныне Узбекская ССР) был в XV в большим культурным центром. Там, в знаменитой обсерватории, созданной видным астрономом Улугбеком (рис. 38), внуком Тамерлана, работал в 20-х годах XV в. крупный ученый того времени — Джемшид Гиясэддин ал-Каши. Это он впервые изложил учение о десятичных дробях.

Улугбек.

В своей книге «Ключ арифметики»[1], написанной в 1427 г. (рис. 39), ал-Каши пишет: «Астрономы применяют дроби, последовательными знаменателями которых являются 60 и его последовательные степени... По аналогии мы ввели дроби, в которых последовательными знаменателями являются 10 и его последовательные степени...».

Ал-Каши называет сотые доли «десятичными секундами», тысячные — «десятичными терциями» и т. д. Термины эти заимствованы из шестидесятеричной нумерации. Вводя десятичные дроби, ал-Каши поставил себе задачу создать простую и удобную систему дробей, основанную на десятичной нумерации и имеющую те же преимущества, которые имели для вавилонян шестидесятеричные дроби.

С. Стевин.

Ал-Каши излагает правила и приводит примеры действий с десятичными дробями. Он вводит специфическую для десятичных дробей запись: целая и дробная часть пишутся в одной строке. Для отделения первой части от дробной он не применяет запятую[2], а пишет целую часть черными чернилами, дробную же — красными или отделяет целую часть от дробной вертикальной чертой.

---

[1] Ал-Каши применяет десятичные дроби до этого в своем сочинении «Об измерении окружности».

[2] Запятая вообще, как знак препинания, была введена на рубеже XV и XVI вв. венецианским типографом Альдо Мануцци. Он же стал прилагать к книгам оглавление.

SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPERATION.

PROPOSITION I. DE L'ADDITION.

Estant donnez nombres de Disme à ajouster: Trouver leur somme:

Explication du donné. Il y a trois ordres de nombres de Disme, desquels le premier 27 ⓪8①4②7③, le deuxieſme 37 ⓪8①7②5③, le troiſieſme 875 ⓪7①8②2③.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur ſomme. *Conſtruction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme ci joignant, les aiouſtant ſelon la vulgaire maniere d'aiouſter nombres entiers, en ceſte ſorte:

⓪	①	②	③
2	7	8	4	7
	3	7	6	7	5
8	7	5	7	8	2
9	4	1	3	0	4

Donne ſomme (par le 1 probleme de l'Arithmetique) 941304, qui ſont (ce que demonſtrent les ſignes deſſus les nombres) 941 ⓪3①0②4③. Ie di, que les meſmes ſont la ſomme requiſe. *Demonſtration.* Les 27 ⓪8①4②7③ donnez, ſont (par la 3e definition) $27\frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, enſemble $27\frac{847}{1000}$, & par meſme raiſon les 37 ⓪6①7②5③ vallent $37\frac{675}{1000}$, & les 8,75 ⓪7①8②4③ feront $875\frac{782}{1000}$, leſquels trois nombres, comme $27\frac{847}{1000}$, $37\frac{675}{1000}$, $875\frac{782}{1000}$, ſont enſemble (par le 10e probleme de l'Arith.) $941\frac{304}{1000}$, mais autant vaut auſſi la ſomme 941 ⓪3①0②4③, c'eſt

Открытие десятичных дробей ал-Каши стало известно в Европе лишь спустя 300 лет после того, как эти дроби были в конце XVI в. заново открыты С. Стевиным[1].

16. «Десятая» Симона Стевина

Всеобщее распространение десятичной позиционной нумерации в практике и растущая потребность в упрощении вычислений и действий над дробями способствовали введению десятичных дробей.

Около 150 лет после ал-Каши в Европе учение о десятичных дробях впервые изложил фламандский инженер и ученый Симон Стевин (1548—1620). В 1585 г. он написал небольшую книгу под названием «Десятая» (рис. 40).

Эта книга состояла всего лишь из 7 страниц, однако содержала всю теорию десятичных дробей.

Рис. 40. Страница из книги С. Стевина «Десятая».

Запись десятичных дробей у Стевина была отличной от нашей. Вот, например, как он записывал число 35,912:

35 ⓪ 9 ① 1 ② 2 ③ или 0 1 2 3 / 35 9 1 2

Итак, вместо запятой нуль в кружке. В других кружках или над цифрами указывается десятичный разряд: 1 — десятые, 2 — сотые и т. д.

Стевин указывал на большое практическое значение десятичных дробей и настойчиво пропагандировал их. Он был первым ученым, потребовавшим введения десятичной системы мер и весов. Однако эта мечта ученого была осуществлена лишь спустя свыше 200 лет, когда была создана метрическая система мер.

---

[1] До Симона Стевина десятичные дроби употребляли Рудольф, Ризе и Виет. Последний явно рекомендовал применять десятичные дроби вместо шестидесятеричных. Число 314, 1592636, например, Виет записывал так:

314, 159, 263,6.

17. Распространение десятичных дробей. Их значение в жизни современного общества

С начала XVII в. начинается довольно интенсивное проникновение десятичных дробей в науку и практику. В Англии в качестве знака, отделяющего целую часть от дробной, была введена точка, которая поныне сохраняется в этой роли в США, Англии и некоторых других странах. Запятая, как и точка, в качестве разделительного знака была предложена в 1616—1617 гг. знаменитым английским математиком Джоном Непером. Десятичную запятую применял и немецкий астроном И. Кеплер [1].

Как десятичная система счисления, так и десятичные дроби пробивали себе дорогу в упорной борьбе со старыми шестидесятеричными дробями. Однако благодаря своим большим преимуществам и достоинствам десятичной системы в целом десятичные дроби завоевывали себе все больше места. Развитие промышленности и торговли, науки и техники требовали все более громоздких вычислений, которые с помощью десятичных дробей легче было выполнять. Окончательно шестидесятеричные дроби были вытеснены десятичными только в XVIII в. В России учение о десятичных дробях впервые изложил в своей «Арифметике» Леонтий Магницкий (1703). Широчайшее применение десятичные дроби получили в XIX в., после введения тесно связанной с ними метрической системы мер и весов.

В сельском хозяйстве и промышленности нашей страны, в науке и во всех отраслях народного хозяйства десятичные дроби и частный их вид, проценты, применяются намного чаще, чем обыкновенные дроби.

18. Проценты в прошлом и в настоящее время

Слово «процент» происходит от латинских слов pro centum, что буквально означает «за сотню» или «со ста». Процентами очень удобно пользоваться на практике, так как они *выражают части целых чисел в одних и тех же сотых долях.* Это дает возможность упрощать расчеты и легко сравнивать части между собой и с целым. Идея выражения частей целого постоянно в одних и тех же долях, вызванная практическими соображениями, родилась еще в древности [2] у вавилонян, которые пользовались шестидесятеричными дробями (гл. 1, § 1; 10; § 2; 15). Проценты были особенно распространены в Древнем Риме. Римляне называли процентами деньги, которые платил должник заимо-

---

[1] Впервые десятичная запятая встречается в 1592 г. в сочинениях итальянского астронома Дж. Маджини (1555—1617), десятичная же точка — в 1593 г. в трудах немецкого математика Хр. Клавиуса (1537—1612).

[2] Ряд задач клинописных табличек посвящен исчислению процентов, однако вавилонские ростовщики считали не «со ста», а «с шестидесяти».

давцу за каждую сотню. От римлян проценты перешли к другим народам Европы.

Долгое время под процентами понимались исключительно прибыль или убыток на каждые 100 рублей. Они применялись только в торговых и денежных сделках. Затем область их применения расширилась, проценты встречаются в хозяйственных и финансовых расчетах, статистике, науке и технике. Ныне *процент* — это частный *вид десятичных дробей, сотая доля целого* (принимаемого за единицу).

В некоторых вопросах иногда применяют и более мелкие, *тысячные доли,* так называемые «промилле» (от латинского pro mille — «с тысячи»), обозначаемые ‰, по аналогии со знаком процента — %. Однако на практике в большинстве случаев «тысячные» — слишком мелкие доли, десятые же доли слишком крупные. Поэтому больше всего удобны сотые доли, иначе говоря, проценты.

В нашей стране ими пользуются при составлении и учете выполнения производственных планов в промышленности и сельском хозяйстве при разных денежных расчетах.

19. Арифметические знаки и обозначения. Знак процента

Цифры, знаки обозначения арифметических действий и другие математические символы вырабатывались людьми постепенно на протяжении веков в тесной связи с развитием самой арифметики. Большинство их образовалось из рисунков, чертежей, букв и сокращенных слов.

Отдельные знаки для некоторых математических понятий появились еще в древности. Однако до XV в. почти не было постоянных общепринятых арифметических знаков. В XV — XVI вв. употреблялись для знака сложения — латинская буква *p* (первая в слове plus, означающем более), для вычитания — буква *m* (первая в слове minus — менее). Для сложения употреблялось также латинское слово et (означающее «и»), которое, как полагают, в скорописи постепенно превратилось в знак +[1]. Знаки + и — встречаются уже в начале 80-х годов XV в. в рукописях, но в печати впервые появляются в арифметике Видмана[2] (рис. 41). В XVII в. минус обозначали и знаком ÷ возможно для того, чтобы не смешать знак минус со знаком препинания (тире). Знак ÷ встречается и в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого.

---

[1] Происхождение знаков + и — точно неизвестно. Некоторые ученые считают, что они происходят из торговой средневековой практики от условных знаков, которые делались на ящиках с товарами, чтобы отметить избыток или недостаток первоначального веса.

[2] Ян Видман — уроженец Чехии — был студентом университета в Лейпциге, где в 1489 г. вышла его арифметика, названная «Быстрый и красивый счет для всего купечества».

Знак умножения × введен в 1631 г. английским математиком Вильямом Оутредом (1574—1660). Точкой для обозначения умножения систематически пользовался знаменитый немецкий математик XVII в. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716)[1]. Он же применял двоеточие для обозначения действия деления[2].

Знак = был введен английским врачом Робертом Рекордом в 1557 г.

Знак % происходит, как полагают, от итальянского слова cento (сто), которое в процентных расчетах часто писалось сокращенно cto. Отсюда путем дальнейшего упрощения в скорописи буквы *t* в наклонную черту произошел современный символ для обозначения процента.

Арифметические знаки входили во всеобщее употребление медленно. Современные знаки действий и равенства стали общепринятыми лишь в конце XVII в.

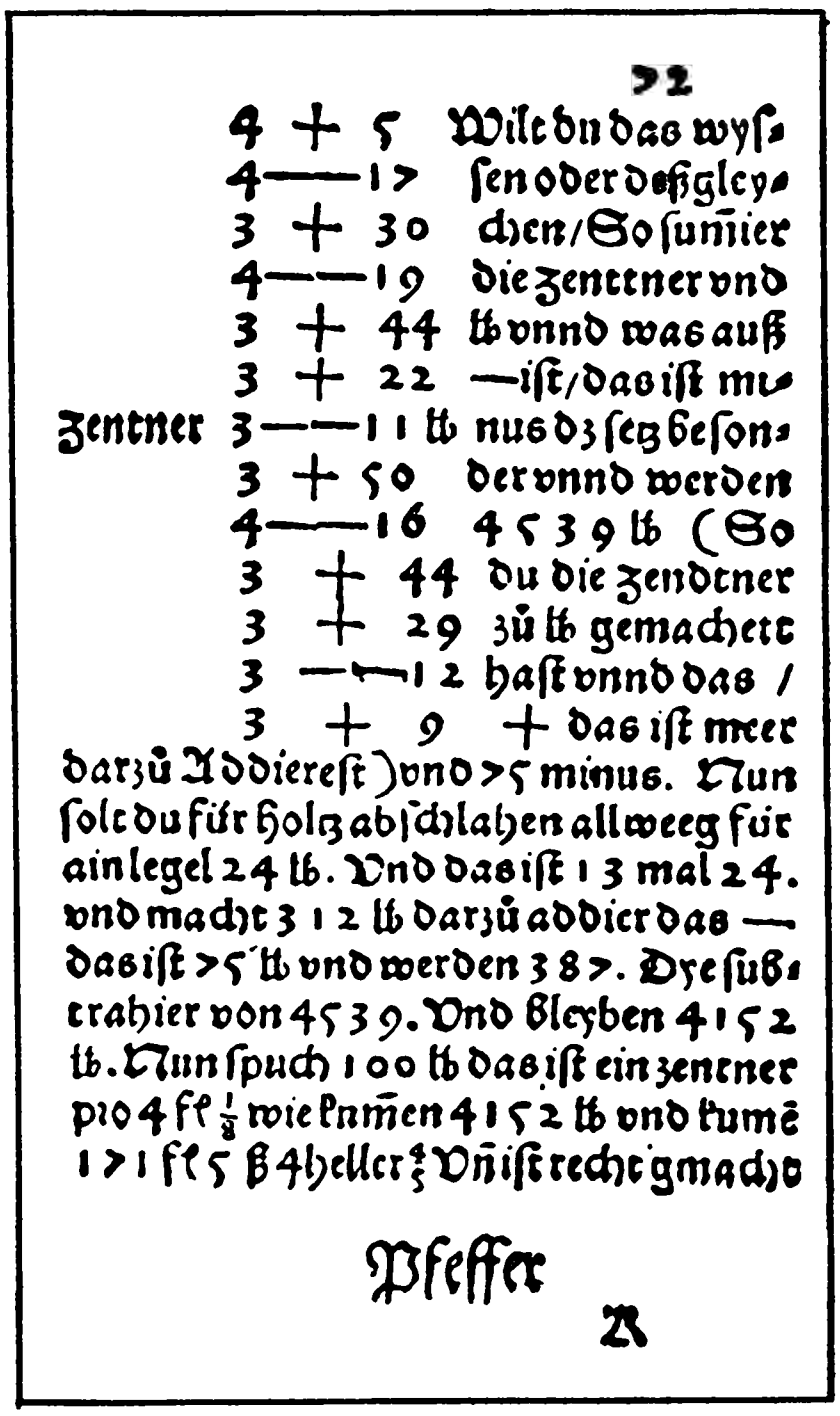

72
4 + 5 Wilt du das wyſ-
4 — 17 ſen oder deßgley-
3 + 30 chen/So ſum̄ier
4 — 19 die zenttner vnd
3 + 44 ℔ vnnd was auß
3 + 22 — iſt/das iſt mi-
Zentner 3 — 11 ℔ nus dz ſetz beſon-
3 + 50 der vnnd werden
4 — 16 4539 ℔ (So
3 + 44 du die zendtner
3 + 29 zů ℔ gemachett
3 — 12 haſt vnnd das /
3 + 9 + das iſt meer
darzů Addiereſt) vnd 75 minus. Nun ſolt du für holtz abſchlahen allweeg für ain legel 24 ℔. Vnd das iſt 13 mal 24. vnd macht 312 ℔ darzů addier das — das iſt 75 ℔ vnd werden 387. Dye ſubtrahier von 4539. Vnd bleyben 4152 ℔. Nun ſpuch 100 ℔ das iſt ein zentner pro 4 fl $\frac{1}{8}$ wie kum̄en 4152 ℔ vnd kumē 171 fl 5 ß 4 heller $\frac{4}{5}$ Vñ iſt recht gmacht
Pfeffer
R

Рис. 41. Страница из «Арифметики» Видмана. Это первая книга, в которой употребляются знаки + и —.

Изобретение математических знаков и символов значительно облегчило изучение математики и способствовало дальнейшему ее развитию.

20. Об арифметических таблицах

Широко применяются в наше время таблицы для вычисления процентов. Они составляются для облегчения вычислений и экономии времени. Возникновение арифметических таблиц как вспомогательных средств вычислений уходит в глубокую древность. Примерно 4000 лет назад египтяне, у которых вычисления с дробями были очень сложными, составляли таблицы для выражения дробей через суммы основных дробей. Древние вавилоня-

[1] До этого точка в качестве знака умножения появляется у Региомонтана (XV в.), затем в 1631 г. у Томаса Гарриота.

[2] Впервые двоеточие для деления встречается в 1633 г. у Джонса. В Англии и США до сих пор применяется иногда для деления знак ÷, который ввел Джон Пелль (1610—1685).

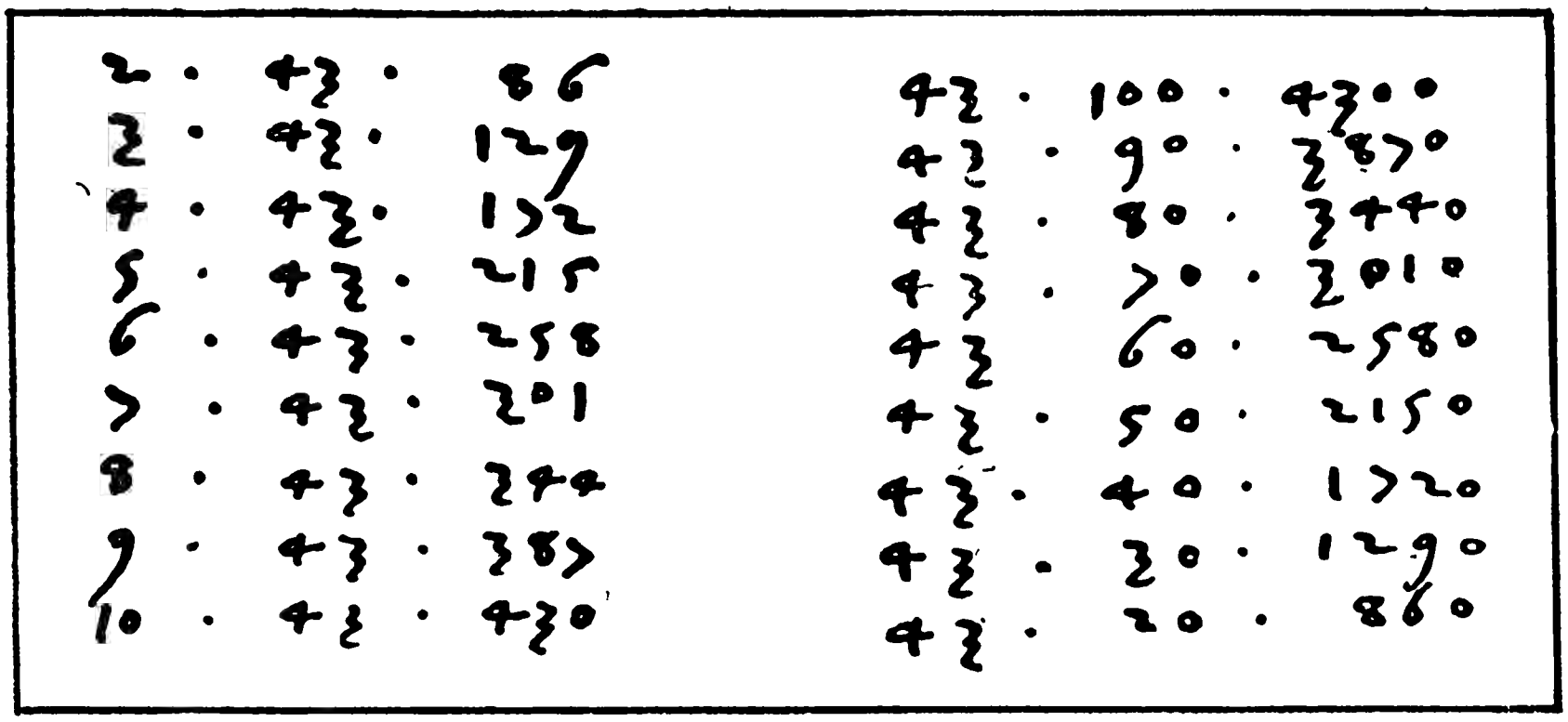


Рис. 42. Отрывок таблицы умножения из рукописи, относящейся к середине XV в.

не составляли таблицы квадратов и кубов чисел, а также обратных чисел и другие. Этими таблицами пользовались писцы при выполнении арифметических операций.

Древнее происхождение имеют также *таблицы умножения.* Ими пользовались вавилоняне, греки, римляне и другие народы. Наиболее ранняя, дошедшая до нас таблица умножения от 1×1 до 10×10 содержится в «Арифметике» греческого математика Никомаха из Геразы (I — II вв.). Она представлена в виде квадрата, где каждая сторона имеет одинаковый с ней столбец. Эта

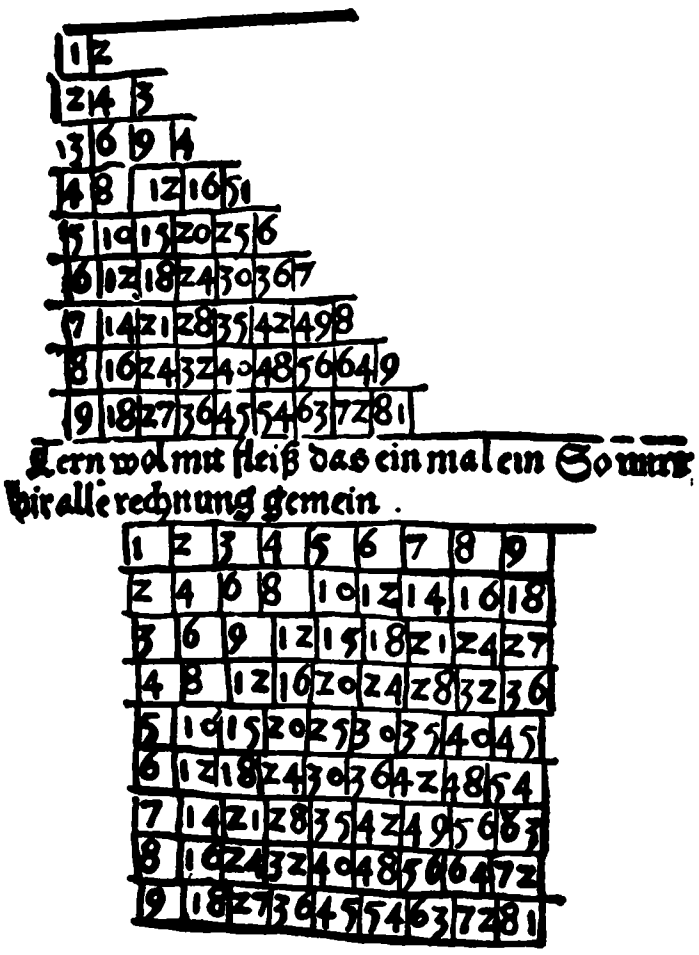


Рис. 43. Треугольная и квадратная таблица умиожения «Арнфметики» Видмана, напечатанной в 1489 г.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
	4	6	8	10	12	14	16	18	0	
3	3	4	5	6	7	8	9	0		
	9	12	15	18	21	24	27	0		
4	4	5	6	7	8	9	0			
	16	20	24	28	32	36	0			
5	5	6	7	8	9	0				
	25	30	35	40	45	0				
6	6	7	8	9	0					
	36	42	48	54	0					
7	7	8	9	0						
	49	56	63	0						
8	8	9	0							
	64	72	0							
9	9	0								
	81	0								
0	0									
	0									

Рис. 44. Таблица умножения Шюке (XV в.).

Таблица.

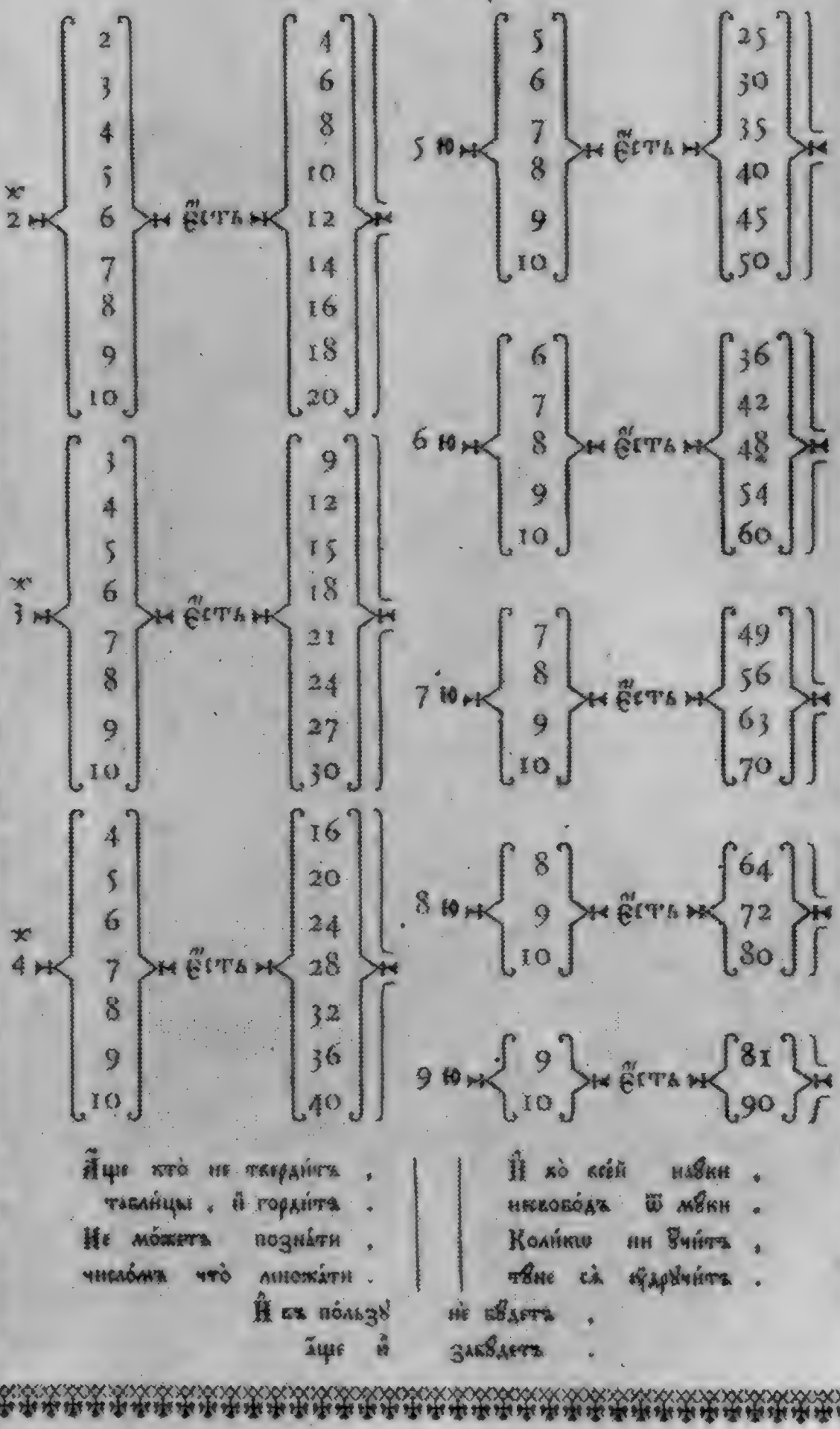


Рис. 45. Таблица умножения из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.

таблица передавалась от народа к народу, из поколения в поколение и поныне используется в наших школах. Знание ее всегда считалось необходимым для каждого ученика, в средние века она получила название Пифагоровой, хотя и была наверно известна задолго до Пифагора.

До введения десятичной позиционной системы счисления она применялась только для нахождения произведения малых чисел. Заучивание и запоминание ее приобрело большое значение лишь с всеобщим распространением десятичной позиционной системы счисления, так как в этой системе произведение любых двух чисел сводится к умножению пар однозначных чисел.

В средневековых школах некоторых стран Европы (Германия, Франция и др.) таблицу Пифагора и более обширные таблицы заучивали хором нараспев.

Помимо Пифагоровой, использовались и другие таблицы умножения, квадратные и треугольные. Некоторые из них показаны на рисунках 42—44.

В «Арифметике» Л. Ф. Магницкого содержится также несколько элементарных таблиц — таблицы чисел, славянской и арабской нумерации, таблицы сложения, умножения — и ряд более сложных таблиц, например величины наклонения магнитной стрелки в зависимости от географической широты местности, локсодромические [1] таблицы и др.

В элементарных таблицах автор избегает повторять одно и то же число несколько раз. Так, в таблице умножения он, используя фигурные скобки, пишет множитель только один раз (см. рис. 45). Например, при умножении 5 на 5, 6, ... 10 он записывает 5 против середины фигурной скобы, которая объединяет все числа от 5 до 10, а после слова «есть» помещает соответствующие произведения также в виде столбика, заключенного фигурными скобками. Подобным образом построена и таблица сложения. Этим приемом достигается большая наглядность, способствующая лучшему запоминанию, и экономия времени в записи. Следует заметить, что автор подчеркивает необходимость твердо помнить таблицы сложения и умножения.

21. О том, как дошли люди до настоящей арифметики

Понятие о числе — одно из основных понятий математики [2]. Древнейшая наука, учение о числах — арифметика (рис. 46, 47) — была создана не в одной какой-либо стране и не одним

---

[1] Локсодромия — линия на поверхности шара, пересекающая все меридианы под одним и тем же углом. Она служит маршрутом корабля, следующего постоянным курсом.

[2] Пункт 21 предназначается для итогового урока по арифметике. Из материала, изложенного здесь, учитель использует то, что сочтет более важным и интересным для намеченного обзора.

	Китайские			Цифры Карошти	Цифры пещерной надписи Назик	Цифры ацтеков	Цифры племени Маия
	Старые	Коммерческие	Научные				
	1	2	3	4	5	6	7
0		〇	〇				
1	一	丨	丨	丨	—	•	•
2	二	丨丨	丨丨	丨丨	=	••	••
3	三	丨丨丨	丨丨丨	丨丨丨	≡	∴	•••
4	四	亼	丨丨丨丨	×	𐤀:𐤀	::	••••
5	五	𐤅	丨丨丨丨丨	丨×	𐤁:𐤁	⁝:	—
6	六	亠	丅	丨丨×	𐤂	⁝:|	⁚
7	七	亠	丌		𐤃	⁝:|••	⁚•
8	八	亖	丌	××	𐤄:𐤄	⁝:|∴	⁚••
9	九	𐤅	丌		𐤅	⁝:|::	⁚•••
10	十	十	丨〇	𐤆	𐤇:𐤇	◇	=
15	十五	十𐤅	丨≣			◇⁝:	≣
20	二十	丨丨十	丨丨〇	𐤆	𐤈	𐤉	
30	三十	丨丨丨十	丨丨丨〇			𐤉◇	
40	四十	亼十	丨丨丨丨〇		𐤊	𐤉𐤉	
50	五十	𐤅十	丨丨丨丨丨〇	𐤆𐤆𐤆		𐤉𐤉◇	
60	六十	亠十	丅〇	𐤆𐤆𐤆		𐤉𐤉𐤉	
70	七十	亠十	丌〇	𐤆𐤆𐤆𐤆	𐤋	𐤉𐤉𐤉◇	
80	八十	亠十	丌〇			𐤉𐤉𐤉𐤉	
90	九十	𐤅十	丌〇			𐤉𐤉𐤉𐤉◇	
100	百	𐤈	丨〇〇	𐤇丨	𐤌	𐤍	
200	三百	丨丨𐤈	丨丨〇〇	𐤇丨丨	𐤍	𐤍	
400	四百	亼𐤈	丨丨丨丨〇〇			𐤍	
500	五百	𐤅𐤈	丨丨丨丨丨〇〇		𐤎	𐤍𐤍	
1000	千	千	丨〇〇〇		𐤏	𐤍𐤍𐤍	
8000	八十	亠十	丌〇〇〇		𐤏𐤋	𐤎	
10000	萬	丌	丨〇〇〇〇				

Рис. 46. Числовые знаки разных народов.

	Египетские			Ассиро-Вавилонские	Финикийские	Сирийские	Пальмирские	Греческие Геродиановы	Римские
	Иероглифы 1	Иератические 2	Демотические 3	4	5	6	7	8	9
1	𓏺	𓏺	𓏺	𒁹	𐤀	ܐ	𐡀	Ι	I
2	𓏺𓏺	𓏺𓏺	𓏺𓏺	𒁹𒁹	𐤀𐤀	ܒ	𐡁	ΙΙ	II
3	𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺	𒁹𒁹𒁹	𐤀𐤀𐤀	ܓ	𐡂	ΙΙΙ	III
4	𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺	𒁹𒁹𒁹 𒁹	𐤀𐤀𐤀𐤀	ܕ	𐡃	ΙΙΙΙ	IV
5	𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹	𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀	ܗ	𐡄	Γ	V
6	𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹	𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀	ܘ	𐡅	ΓΙ	VI
7	𓏺𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹 𒁹	𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀	ܙ	𐡆	ΓΙΙ	VII
8	𓏺𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹	𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀	ܚ	𐡇	ΓΙΙΙ	VIII
9	𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹𒁹	𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀	ܛ	𐡈	ΓΙΙΙΙ	IX
10	𓎆	𓎆	𓎆	𒌋	𐤊	ܝ	𐡉	Δ	X
11	𓎆𓏺	𓎆𓏺	𓎆𓏺	𒌋𒁹	𐤊𐤀	ܝܐ	𐡉𐡀	ΔΙ	XI
15	𓎆𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺	𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺	𒌋𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹	𐤊𐤀𐤀𐤀𐤀𐤀	ܝܕ	𐡉𐡄	ΔΓ	XV
20	𓎆𓎆	𓎆𓎆	𓎆𓎆	𒌋𒌋	𐤊𐤊	ܟ	𐡊	ΔΔ	XX
30	𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆	𒌋𒌋𒌋	𐤊𐤊𐤊	ܠ	𐡋	ΔΔΔ	XXX
40	𓎆𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆𓎆	𒌋𒌋𒌋 𒌋	𐤊𐤊𐤊𐤊	ܡ	𐡌	ΔΔΔΔ	XL
50	𓎆𓎆𓎆 𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	𒌋𒌋𒌋 𒌋𒌋	𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊	ܢ	𐡍	Γ	L
60	𓎆𓎆𓎆 𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	𒌋𒌋𒌋 𒌋𒌋𒌋	𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊	ܣ	𐡎	ΓΔ	LX
70	𓎆𓎆𓎆𓎆 𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	𒌋𒌋𒌋𒌋 𒌋𒌋𒌋	𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊	ܥ	𐡏	ΓΔΔ	LXX
80	𓎆𓎆𓎆𓎆 𓎆𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	𒌋𒌋𒌋𒌋 𒌋𒌋𒌋𒌋	𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊	ܦ	𐡐	ΓΔΔΔ	LXXX
90	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆	𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋 𒌋𒌋𒌋𒌋	𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊𐤊	ܨ	𐡑	ΓΔΔΔΔ	XC
100	𓍢	𓍢	𓍢	𒌋𒁹	𐤋	ܩ	𐡒	H	C
200	𓍢𓍢	𓍢𓍢	𓍢𓍢	𒌋𒁹𒁹	𐤋𐤋	ܪ	𐡓	HH	CC
400	𓍢𓍢𓍢𓍢	𓍢𓍢𓍢𓍢	𓍢𓍢𓍢𓍢	𒌋𒁹𒁹 𒌋𒁹𒁹				HHHH	CD
500	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢	𒌋𒁹𒁹𒁹 𒌋𒁹𒁹𒁹				Γ	D
1000	𓆑	𓆑	𓆑	𒌋𒌋 𒌋𒌋				M	M
10000	𓂭			𒌋𒌋𒌋 𒌋𒌋𒌋					
10^5	𓆐								
10^6	𓁨								
10^7	𓁩								

Рис. 47. Числовые знаки разных народов.

человеком, а родилась из практики, из трудовой деятельности всего человечества. На протяжении тысячелетий все страны и народы вносили свой вклад в развитие арифметики.

На одной из ранних стадий развития культуры *египтяне* ввели арифметические таблицы как вспомогательное средство вычисления. *Вавилоняне* пошли дальше египтян. Они создали первую в мире позиционную систему счисления — шестидесятеричную. Велики заслуги народов Древней *Индии* в развитии арифметики. Современные цифры — индийского происхождения. В Индии в V — VII вв была введена впервые десятичная позиционная система счисления (с применением нуля), которой и поныне пользуется весь мир.

Древние *греки* первоначально заимствовали математические знания из Египта и Вавилона. Хотя характер этих знаний был преимущественно практическим, в них содержались и некоторые зачатки теории. В процессе развития культуры в связи с общественно-экономическими условиями в Древней Греции в VII — IV вв. до н. э. эмпирические знания по арифметике дополняются, обобщаются и систематизируются. О большом значении, которое получила в Древней Греции арифметика, можно судить и по мифу о Прометее, имя которого связывается с появлением у людей культуры: легендарный титан Прометей, похитивший огонь у богов и принесший его людям, изобрел числа...[1]

От *практической* арифметики, названной в Греции «логистикой», начинает отделяться *теоретическая* арифметика, которая содержала не просто правила о том, как решать те или иные задачи, но и логическое обоснование правил, *доказательства*. Математика успешно развивалась в Древней Греции в течение целого тысячелетия, от VII в. до н. э. до IV в. н. э. Огромное значение для развития теоретической арифметики имели труды Пифагора, Евдокса, Евклида, Эратосфена, Архимеда, Диофанта и других древнегреческих математиков.

Большой вклад в развитие арифметики в VII — XV вв. внесли ученые стран ислама: ал-Хорезми, Омар Хайям, ал-Караджи, Насирэддин ат-Туси, ал-Каши и другие, писавшие свои произведения на арабском языке. Переведенные на арабский язык классические труды великих греческих ученых были в XII — XIV вв. переведены на латинский язык, которым пользовались в средние века ученые Европы. Математика стран ислама, включающая в себя и сведения, заимствованные из греческой, индийской и вавилонской науки, оказала значительное влияние на науку Западной Европы.

В 1202 г. появилась «Книга абака» («абак» в смысле «арифметика») замечательного итальянского математика Леонардо Пизанского (Фибоначчи), сыгравшая наряду с арифметическим трактатом ал-Хорезми важнейшую роль в распространении в

---

[1] См.: Эсхил. Прометей прикованный. М., 1956, с. 35.

Европе новой позиционной десятичной системы счисления и индийско-арабских цифр. В книге Фибоначчи встречается, в частности, дробная черта и рекомендуется для чтения многозначных чисел их разбиение на группы по 3 цифры. Группы цифр отмечаются точками или дугами вверху.

Начиная с XVI в. на первое место в математическом творчестве выступают европейские ученые. Вводятся постепенно ныне употребляемые новые арифметические обозначения и знаки, названия чисел и группирование их по классам и разрядам. С XVII в. дальнейшее развитие получает зародившаяся в Древней Греции теория чисел (см. гл. 3, § 5; 30).

Роль арифметики в жизни современного общества очень велика. Арифметика необходима во всякой отрасли науки, в сельском хозяйстве, промышленности и технике. С развитием производства растет необходимость облегчать и ускорять счет и вычисления. Все большее применение в практике грандиозного социалистического строительства в нашей стране находят быстродействующие математические машины (гл. 7, § 7). Развитие теоретической арифметики и совершенствование методов счета и вычислений продолжаются и в наши дни.

Глава 2.
ГЕОМЕТРИЯ

§ 3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ

22. Из истории геометрии

Более двух тысяч лет назад в Древней Греции впервые стали складываться и получили первоначальное развитие основные представления и обоснования науки геометрии. Этому периоду развития геометрии предшествовала многовековая деятельность сотен поколений наших предков.

О первых шагах накопления сведений по геометрии мы не имеем никаких письменных источников и об этом периоде можем только предполагать. Первоначальные геометрические представления, как и представления о счете, складывались постепенно на протяжении тысячелетий. Появлялись они в результате практической деятельности человека и развивались чрезвычайно медленно.

Еще в глубокой древности, когда люди питались только тем, что им удавалось найти и собрать (листья, корни растений, грибы, улитки, мелкие животные и т. п.), им приходилось переходить с места на место. В связи с этим они приобретали некоторые представления о расстоянии. Вначале, надо полагать, люди сравнивали расстояния по времени, в течение которого они их проходили. Например, если от реки до леса можно было дойти за время от восхода солнца до его захода, то говорили: река от леса находится на расстоянии дня ходьбы.

Такой способ оценки расстояния дошел и до наших дней. Так, на вопрос: «Далеко ли ты живешь от школы?» — можно услышать: «В десяти минутах ходьбы». Это значит, что от дома до школы надо идти 10 мин. С развитием человеческого общества, когда люди научились делать примитивные орудия—каменный нож, молоток, лук, стрелы и пр., постепенно появилась необходимость измерять длину с большей точностью. Человек стал сравнивать длину рукоятки или диаметр отверстия молотка со своей рукой или толщиной пальца. Остатки этого способа измерений также дошли до наших дней: примерно сто — двести лет назад холсты (грубую ткань из льна) измеряли локтем — длиной руки от локтя до среднего пальца. А фут, что в переводе на русский

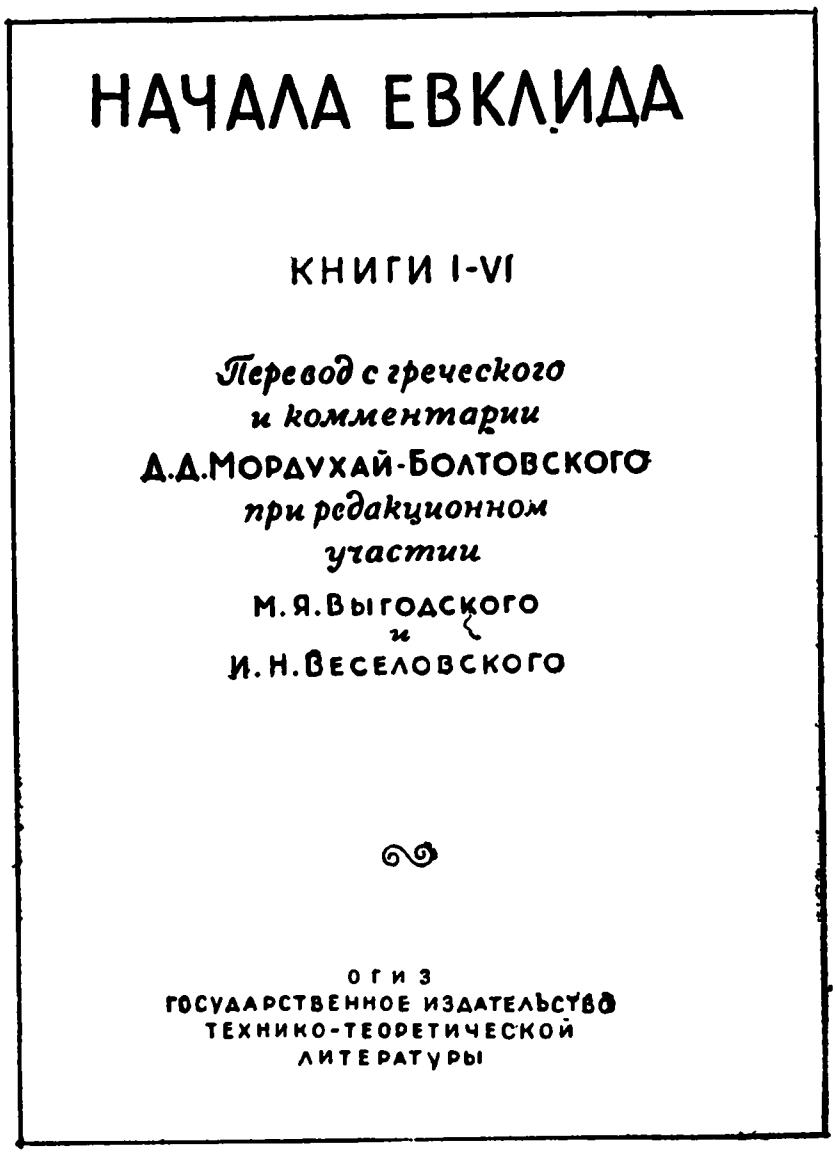
язык означает нога, употребляется как мера длины в некоторых странах и в настоящее время, например, в Англии.

Изготавливая лук, человек изгибал прямой ствол тонкого дерева и связывал концы его тетивой — шнуром. Ствол, разгибаясь, натягивал шнур. Натянутый шнур стал впоследствии прообразом прямой линии. И в наше время можно видеть, как, желая отметить прямую, натягивают шнур от одного колышка до другого. На шнур как прообраз прямой указывает сходство в названии линии и льна, из волокон которого делали нити и шнуры. Лен на латинском языке называется «линум» (linum). Это слово почти полностью совпадает со словом «линия».

Переход первобытного общества от охоты к земледелию, а затем развитие земледелия, ремесел и торговли вызвали практическую необходимость измерять расстояния и находить площади и объемы различных фигур. Из истории известно, что примерно 4000 лет назад в долине реки Нил образовалось государство Египет. Правители этого государства — фараоны установили налоги за земельные участки на тех, кто ими пользовался. В связи с этим требовалось определять размеры площадей участков четырехугольной и треугольной формы.

Река Нил после дождей разливалась и часто меняла свое русло, смывая границы участков. Приходилось исчезнувшие после наводнения границы участков восстанавливать, а для этого вновь измерять их. Выполняли такую работу лица, которые должны были уметь измерять площади фигур. Появилась необходимость изучить приемы измерения площадей. К этому времени и относят зарождение геометрии. Слово «геометрия» состоит из двух слов: «ге», что в переводе на русский язык означает земля, и «метрио» — мерю. Значит, в переводе «геометрия» означает землемерие. В своем дальнейшем развитии наука геометрия шагнула далеко за пределы землемерия и стала важным и большим разделом математики. В геометрии рассматривают формы тел, изучают свойства фигур, их отношения и преобразования.

Как наука геометрия оформилась к III в. до нашей эры благодаря трудам ряда греческих математиков и философов. Наибольшая заслуга в


НАЧАЛА ЕВКЛИДА

КНИГИ I-VI

Перевод с греческого и комментарии
Д.Д.МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОГО
при редакционном участии
М.Я.Выгодского
и
И.Н.Веселовского

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ

Рис. 48. Титульный лист русского издания «Начал» Евклида. 1948 г.

этом принадлежит Евклиду, жившему в г. Александрия. Он, опираясь на исследования и выводы своих предшественников — Фалеса, Пифагора, Гиппократа, Евдокса и других древнегреческих ученых, привел в систему накопленные по геометрии сведения, дополнил их своими исследованиями и открытиями, а затем последовательно изложил в 13 книгах, назвав их «Начала». Его труд на протяжении свыше 2000 лет служил учебным пособием по геометрии. Его книги изучали все великие математики.

23. О геометрических фигурах. Вычисление отрезков

Отвлекаясь от физических свойств предметов, изучая лишь их размеры, форму и положение, человек пришел к отвлеченным понятиям геометрического тела и геометрической фигуры: линии, точки, прямой, плоскости, отрезка и т. д.

Геометрические фигуры встречаются в самых древних дошедших до нас математических документах: в Московском папирусе, в папирусе Ахмеса и в древневавилонских клинописных текстах, написанных около 4000 лет назад. В этих документах содержатся задачи, в которых выступает на первый план вычисление площадей и объемов отдельных фигур.

Плоские геометрические фигуры египтяне изображали в лежачем положении (рис. 49), а пространственные — в прямом, стоячем положении (рис. 50). В Московском папирусе, по-видимому, фигуры вычерчены без применения циркуля и линейки; а в папирусе Ахмеса прямые, очевидно, проводились с помощью линейки.

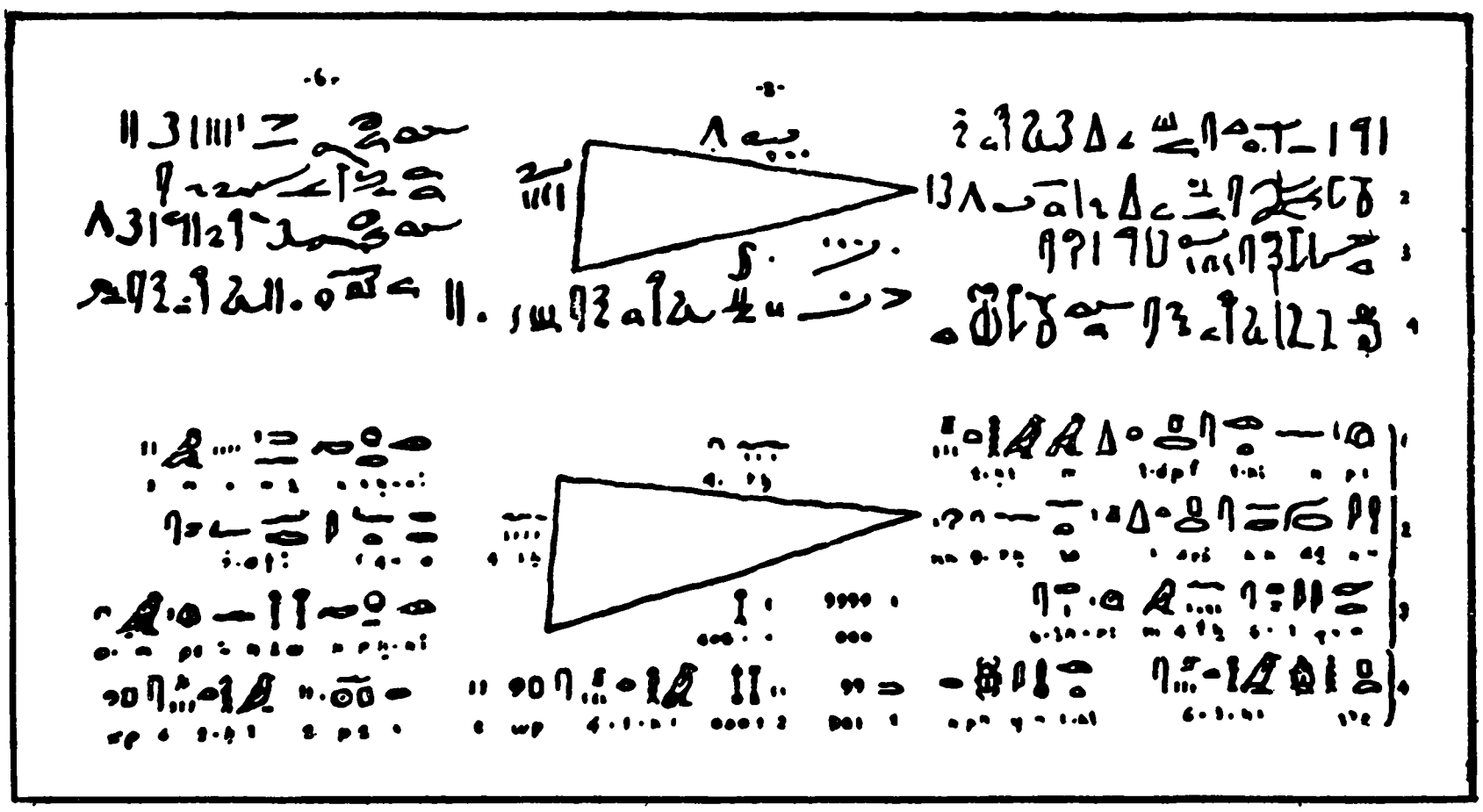


Рис. 49. Вычисление площади треугольника в папирусе Ахмеса. Внизу иероглифическая транскрипция.

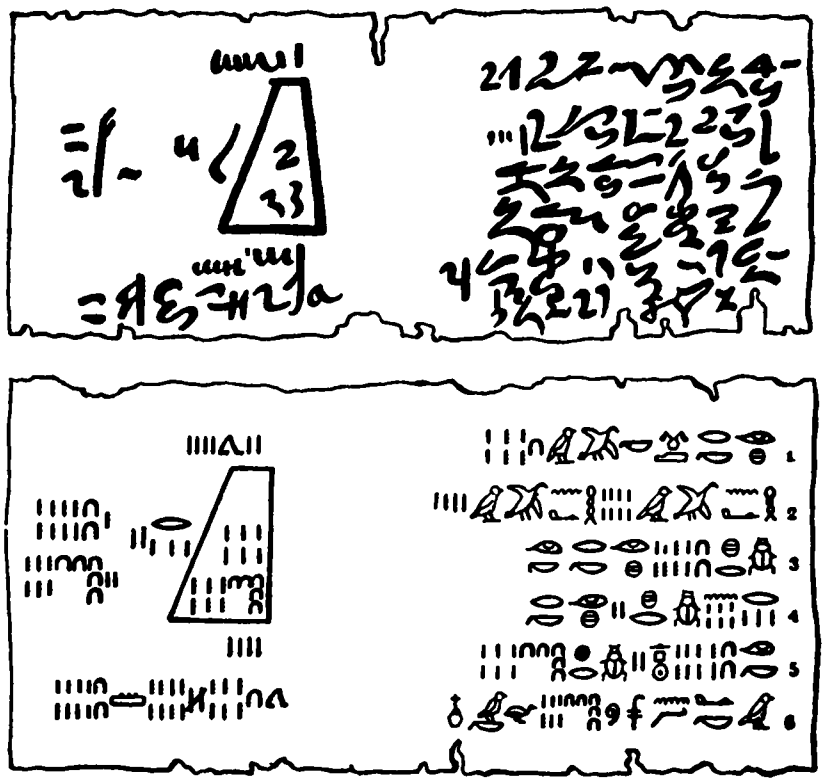


Рис. 50. Вычисление объема усеченной пирамиды в Московском папирусе. Вверху иератический текст, внизу иероглифическая транскрипция.

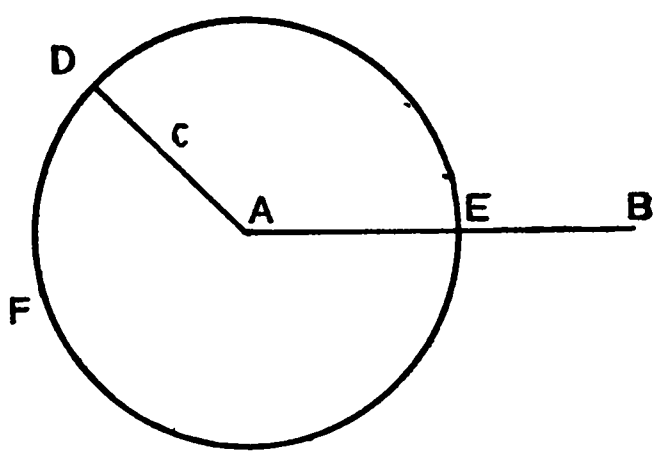


Рис. 51.

Обозначение прямых, концов отрезков и вершин фигур буквами ведет свое начало от геометров Древней Греции.

Вот как решает Евклид в своих «Началах» (3-е предложение 1-й книги) задачу о построении разности двух данных отрезков:

«Пусть данные две неравные прямые (то есть отрезки) будут AB и c (рис. 51), из них бóльшая пусть будет AB; вот требуется от AB отнять c.

От точки A отложим AD, равный c, а из центра A раствором AD опишем окружность DEF (которая пересечет прямую AB в точке E). Поскольку AE равен AD и c равен AD, то AE равен c».

BE является разностью двух данных отрезков.

Еще в древности стали вводить некоторые знаки и обозначения для геометрических фигур и понятий. Так, древнегреческий ученый Герон (I в.) применял знак $\triangledown$ вместо слова «треугольник», $\square$ — вместо «прямоугольник». Другой древнегреческий ученый Папп (III в.) писал знак $\odot$ вместо слова «окружность», $\square$ — вместо «четырехугольник» и т. п.

Знак $\angle$ для обозначения угла ввел в XVII в. французский математик П. Эригон, который применял и следующие знаки: $\perp$ — для понятия «перпендикулярно», $\llcorner$ — для прямого угла, $\bigcirc$ — для круга, $\frown$ — для части окружности.

24. О параллельных прямых

Греческое слово «параллелой», означающее «рядом идущие», «друг подле друга проведенные» (прямые), стало употребляться как геометрический термин еще 2500 лет назад в школе Пифагора.

В «Началах» Евклида учение о параллельных излагается в 1-й из его 13 книг (частей). Оно начинается с определения: «Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой стороны между собой не встречаются».

Древнегреческий ученый Прокл (410—485 гг. н. э.), комментируя первую книгу «Начал», указывает, что еще в те времена существовали и другие определения параллельных; так, Посидоний (I в. до н. э.) предлагал называть параллельными две прямые, лежащие в одной плоскости и равноотстоящие друг от друга. Однако это определение по своей сущности равносильно определению Евклида: опираясь на определение, данное Евклидом, несложно доказать утверждение Посидония.

В «Началах» Евклида приведены и признаки параллельных прямых.

В III в. н. э. древнегреческий математик Папп пользовался для обозначения параллельности знаком =. Так же поступал в XII в. французский математик Эригон. Лишь в XVIII в., после того как введенный Рекордом знак равенства вошел в общее употребление, стали пользоваться знаком ∥ для обозначения параллельных.

С развитием науки определение параллельных претерпевало некоторые изменения. В современном школьном курсе геометрии параллельные определены как прямые, лежащие в одной плоскости, если они не имеют общих точек или совпадают.

25. Геометрические инструменты

К древнейшим геометрическим инструментам относятся *циркуль* и *линейка*. Употребление линейки берет свое начало с незапамятных времен. Циркуль был изобретен значительно позже. Фигуры папируса Ахмеса, например, свидетельствуют о применении линейки, но не циркуля. Согласно римскому поэту Овидию (I в.) циркуль был изобретен в Древней Греции [1].

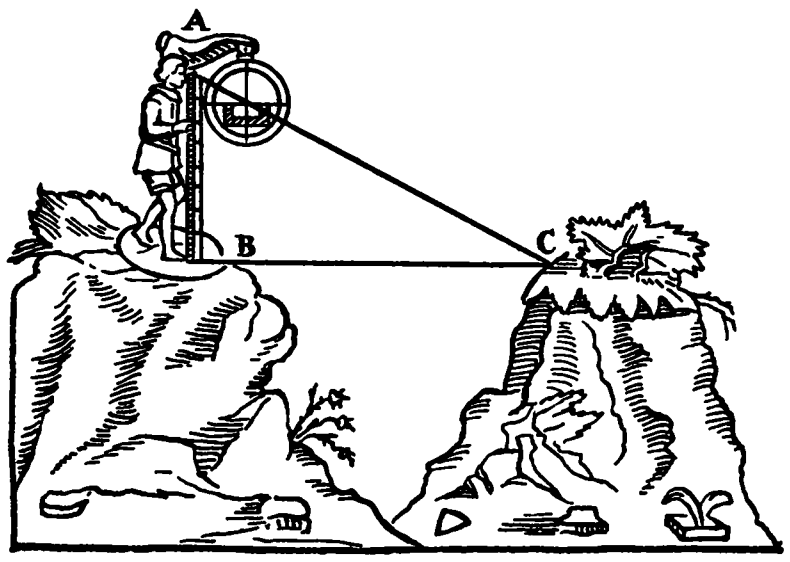


Рис. 52. Применение астролябии в XVI в.

[1] Рекомендуется использовать этот материал в связи с практическими работами на местности.

Астролябия (по-гречески «астролябион») — тоже древний инструмент. Термин образовался от греческих слов «астрон» — звезда и «лабе» — схватывание. Как угломерный прибор астролябия употреблялась еще до XVIII в. для определения положения небесных светил, затем для геодезических измерений (рис. 52). В настоящее время астролябия на практике вышла из употребления как устарелый инструмент и осталась только школьным пособием.

Термин «алидада» (вращающаяся линейка угломерных инструментов) взят из средневекового латинского языка и происходит от арабского «аль-идада» — линейка. «Лимб» происходит от латинского limbus — кромка, кайма.

«Рулетка» — термин французского происхождения (rouler — свертывать, катать). Слово «экер», взятое из французского языка, образовалось от латинского quadrare — сделать четырехугольным, прямоугольным. «Транспортир» происходит от латинского transportare — переносить, перекладывать.

Градусное измерение, деление окружности на 360 равных частей, было принято в вавилонской астрономии и, вероятно, берет свое начало от того, что первоначально вавилонский год насчитывал 360 дней, к которым египтяне прибавили 5 каникулярных дней.

Деление градуса на 60 мин, минуты на 60 с связано с шестидесятеричной вавилонской нумерацией.

Глава 3.
АРИФМЕТИКА И НАЧАЛА АЛГЕБРЫ

§ 4. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. О происхождении различных систем счисления

Наши далекие предки учились считать, пользуясь пальцами одной руки, затем пальцами обеих рук или пальцами рук и ног вместе. Счет производился сначала на пальцах левой руки с помощью одного или двух пальцев правой руки, затем переходили на правую руку, начиная с большого пальца, и лишь после этого на пальцы ног. Так возникли *пятеричная, десятичная* и *двадцатеричная* системы счисления.

Вот что рассказывает замечательный русский ученый-путешественник Н. Н. Миклухо-Маклай (1846—1888) о коренных жителях новой Гвинеи: «Излюбленный способ счета состоит в том, что папуас загибает один за другим пальцы руки, затем издает определенный звук, например «бе, бе, бе»... Досчитав до пяти, он говорит «ибон-бе» (рука), затем он загибает пальцы другой руки, снова повторяет «бе, бе».., пока не доходит до «ибон-али» (две руки). Затем он идет дальше, приговаривая «бе, бе».., пока не доходит до «самба-бе» и «самба-али» (одна нога, две ноги). Если нужно считать дальше, папуас пользуется пальцами рук и ног кого-нибудь другого»[1]. Однако известны народы, у которых единицами счета были не пальцы (или не только одни пальцы), а их суставы.

Вообще системы счисления с более высоким основанием появились позднее, чем с низким. Самой древней является двоичная система. С развитием контактов между различными племенами некоторые системы счисления объединялись. Многие народы древности пользовались смешанной *пятерично-десятеричной* системой, о чем свидетельствует, например, наличие в римской нумерации особых символов для чисел 5 (V); 10 (X); 50 (L); 100(C); 500(D); 1000(M). Среди индейцев Северной Америки и многих племен Африки господствовала *пятерично-двадцатеричная система.*

Современным людям приходится употреблять числа повседневно. Если бы каждое число имело свое особое название и

---

[1] Миклухо-Маклай Н. Н. Собрание сочинений, Изд-во АН СССР, 1940, т. 7, с. 280.

Архимед.

обозначалось бы отличным от других знаком, то запомнить все эти названия и знаки было бы невозможно. Избежать этой сложности помогла сложившаяся в течение веков система счисления и нумерации. За основание такой системы можно принять любое число, большее единицы: 2, 5, 10, 12, 60 и т. д. Однако в двоичной и пятеричной системах числа выражаются и записываются довольно громоздко. Системы с основанием выше 10 требуют больше слов и знаков для наименования и записи чисел. Вот почему в результате длительного развития укоренилась наиболее удобная современная десятичная позиционная система нумерации и исчисления. Позиционная десятичная система счисления и нумерации была известна в Индии свыше полутора тысяч лет назад. В Европу она пришла вместе с арабами, вторгшимися в Испанию в VIII в. Из Испании индийская, или арабская, нумерация распространилась по всей Европе. Разумеется, за время от VIII в. до наших дней очертания цифр менялись и неоднократно (см. гл. 7, § 5).

2. О натуральном ряде. «Исчисление песчинок» Архимеда. Современная запись больших чисел

В силу необходимости вести счет любых групп предметов возникли натуральные[1] числа: 1, 2, 3, 4... На первых стадиях культурного развития человечества натуральный ряд состоял из немногих чисел. В дальнейшем он обогащался все новыми и большими числами. Долгое время, однако, натуральный ряд считался *конечным,* т. е. люди считали, что существует какое-то последнее, наибольшее число. В Древней Руси, например, одно время число 10^4, названное «тьма», считалось трудным для представления большим числом. О числе 10^{12}, названном «тьма тем», говорилось в старинных русских памятниках: «Больше сего числа несть человеческому уму разумети...»

Однако в ходе общественного развития человеческому уму пришлось «разуметь» все большие и большие числа и полностью

[1] О натуральном в смысле *естественном* ряде чисел говорится во «введении в арифметику» греческого математика (неопифагорейца) Никомаха из Геразы, жившего около 100 г. н. э. Арифметика Никомаха была переработана и переведена на латинский язык римским автором Боэцием (480—524), впервые применившим термин «натуральное число». Этот термин встречается затем в некоторых средневековых рукописях. В современном смысле понятие и термин «натуральные числа» встречаются у французского философа и математика Ж. Даламбера (1717—1783).

отказаться от мысли, будто бы в натуральном ряду существует наибольшее число. К осознанию этого факта разные народы приходили в разное время.

Величайший ученый Древней Греции Архимед в III в. до н. э. написал небольшую арифметическую книгу «Псаммит», или «Исчисление песчинок», в которой он опровергает ложное мнение некоторых людей о том, будто бы число песчинок на земле столь велико, что его нельзя выразить, а числа больше этого и вообще якобы не существует. Архимед доказывает, что если наполнить песчинками пространство всего мира, всю вселенную, которую он принимает за огромный шар с диаметром около 15 000 000 000 километров, то число песчинок (в нашей нумерации) не превысит 10^{63}, т. е. числа, составленного из единицы с 63 нулями, и что, конечно, существуют еще большие числа, сколь угодно большие [1]. Таким образом, в «Псаммите» Архимед показал, что счет можно продолжать неограниченно, т. е. *натуральный ряд бесконечен.* Потребовались, однако, сотни лет, чтобы эта идея стала общедоступной.

10^{63} является примером современной записи больших чисел. Всякое число, изображаемое единицей с n нулями, коротко записывается 10^n и называется n-й степенью десяти. Например, сто есть вторая степень десяти ($10^2 = 10 \cdot 10 = 100$), тысяча — третья степень десяти ($10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$) и т. п. Понятие степени позволяет не только коротко записывать, но и более кратко называть большие числа, обычно приближенные, встречаемые в современной науке и технике. Например, число шесть секстиллионов, которым приближенно выражается в тоннах масса Земли, можно записать не цифрой шесть с 21 нулем, а гораздо короче: $6 \cdot 10^{21}$ — и читать «шесть на десять в двадцать первой степени». Указанная запись больших чисел особенно распространена в современной физике и астрономии.

3. Возникновение отрицательных чисел

Известно, что натуральные числа возникли при счете предметов. Потребность человека *измерять* величины и то обстоятельство, что результат измерения не всегда выражается целым числом, привели к расширению множества натуральных чисел. Были введены нуль и дробные числа.

Процесс исторического развития понятия числа на этом не закончился. Однако не всегда первым толчком к расширению понятия числа были исключительно практические потребности людей. Бывало и так, что задачи самой математики требовали расширения понятия числа. Именно так обстояло дело с возникновением отрицательных чисел. Понятие об отрицательных числах возникло в практике решения алгебраических уравнений.

---

[1] Архимед не располагал нашими обозначениями степени.

После расширения множества натуральных чисел до дробных стало возможным делить любое целое число на другое целое число (за исключением деления на нуль). Вычитать же целое число из другого целого числа, когда вычитаемое больше уменьшаемого, долгое время казалось невозможным. Однако при решении уравнений нередко приходилось производить вычитание большего числа из меньшего и сталкиваться таким образом с понятием отрицательного числа.

Не только египтяне и вавилоняне, но и древние греки не знали отрицательных чисел. Понятие отрицательного числа появляется при решении систем линейных уравнений. Для производства вычислений математики того времени пользовались счетной доской, на которой числа изображались с помощью счетных палочек. Так как знаков + и — в то время еще не было, палочками красного цвета изображали положительные числа, отрицательные же — палочками черного цвета. Отрицательные числа долгое время называли словами, которые означали «долг», «недостача». Даже в VII в. в Индии положительные числа толковались как имущество, а отрицательные — как долг. В Древнем Китае были известны лишь правила сложения и вычитания положительных и отрицательных чисел; правила умножения и деления не применялись.

4. «Люди не одобряют отрицательных чисел...»

От Диофанта до Бхаскары

Еще в III в. древнегреческий математик Диофант фактически уже пользовался правилом умножения отрицательных чисел при таких преобразованиях: $(2x-3)\,(2x-3)=4x^2-12x+9$.

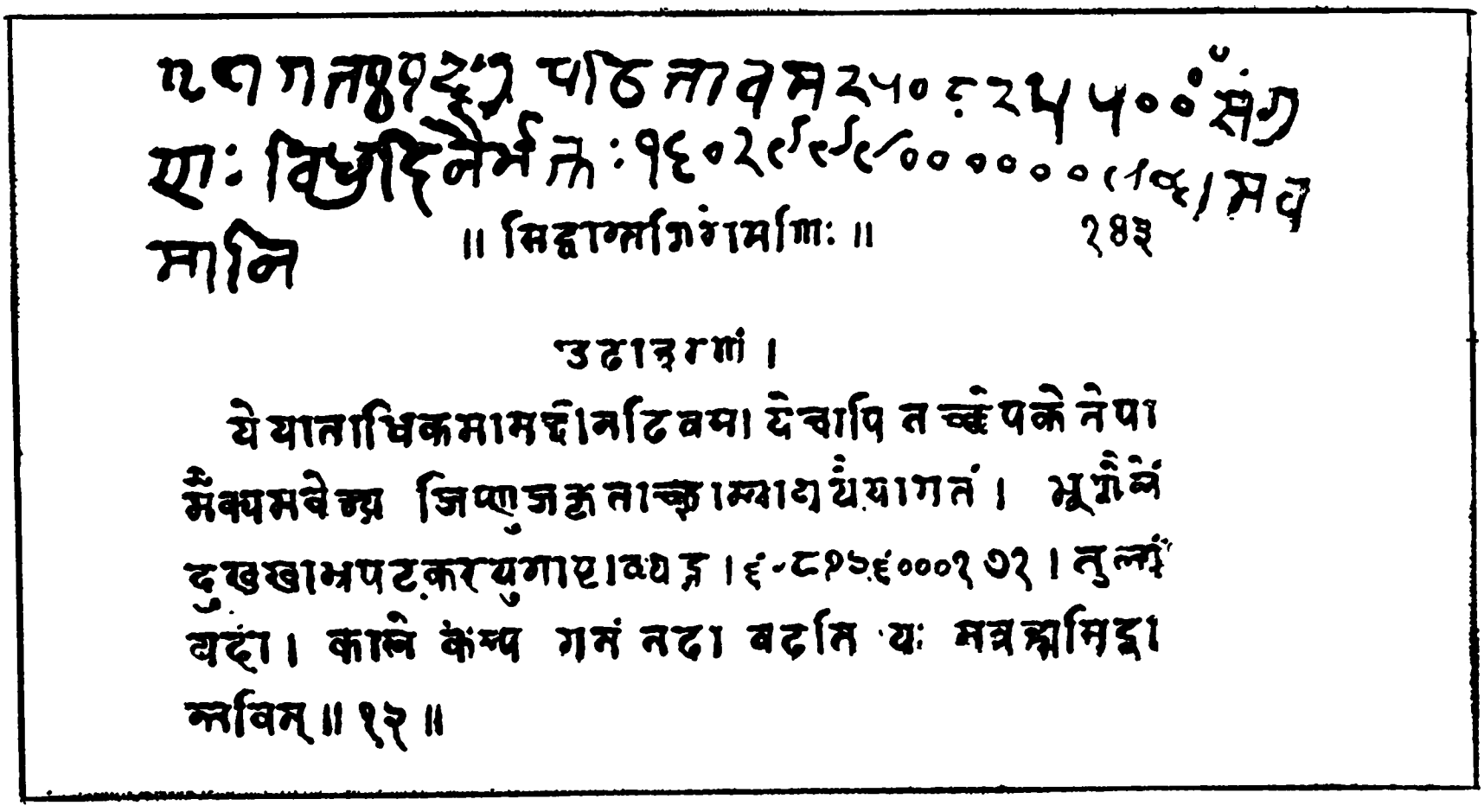


Рис. 53. Страница из произведения Бхаскары.

Однако —3 для Диофанта не самостоятельное отрицательное число, а всего лишь «вычитаемое», любое же положительное число — «прибавляемое». Правило умножения он выражает так: «Вычитаемое, умноженное на прибавляемое, дает в результате вычитаемое; вычитаемое на вычитаемое дает прибавляемое». Отдельно взятые отрицательные числа Диофант не признавал, и если при решении уравнения получался отрицательный корень, то он отбрасывал его как «недопустимый». Диофант старался так формулировать задачи и составлять уравнения, чтобы избегать отрицательных корней.

Совершенно по-иному относились к отрицательным числам индийские математики. Они признавали существование отрицательных корней уравнений, толковали положительные числа как представляющие имущества, а отрицательные — долги, применяя к ним все правила четырех действий, однако без должного теоретического обоснования.

Вот правила сложения и вычитания, изложенные индийским математиком Брахмагуптой в VII в. н. э.:

Таблица 1

Современная запись[1]	Правила Брахмагупты
1. $a + b = c$	Сумма двух имуществ есть имущество.
2. $(-a) + (-b) = -c$	Сумма двух долгов есть долг.
3. $a + (-b) = a - b$	Сумма имущества и долга равна их разности.
4. $a + (-a) = 0$	Сумма имущества и равного долга равна нулю.
5. $0 + (-a) = -a$	Сумма нуля и долга есть долг.
6. $0 + a = a$	Сумма нуля и имущества есть имущество.
7. $0 - (-a) = a$	Долг, вычитаемый из нуля, становится имуществом.
8. $0 - a = -a$	Имущество, вычитаемое из нуля, становится долгом.

Индийский математик Бхаскара (XII в.) выразил правила умножения и деления следующим образом: «Произведение двух имуществ или двух долгов есть имущество; произведение имуществ на долг есть убыток. То же правило имеет место и при делении».

Однако, несмотря на широкое использование отрицательных чисел при решении задач с помощью уравнений, в Индии относились к отрицательным числам с некоторым недоверием, считая их своеобразными, не совсем реальными. Бхаскара прямо писал: «Люди не одобряют отвлеченных отрицательных чисел...» (рис. 53).

[1] Через a, b, c здесь обозначены положительные числа.

Не одобряли их долго и европейские математики, потому что истолкование «имущество — долг» вызывало недоумения и сомнения. В самом деле, можно «складывать» или «вычитать» имущества и долги, но какой реальный смысл может иметь «умножение» или «деление» имущества на долг?

Вот почему с большим трудом завоевывали себе место в математике отрицательные числа.

5. Путь к признанию

В Европе отрицательные числа упоминаются уже у Леонардо Фибоначчи (XII—XIII вв.). Отрицательные числа находят некоторое применение и толкуются как «долги» и у других европейских ученых XIV—XVI вв.; однако большинство ученых называет новые числа «ложными», в отличие от «истинных» положительных чисел.

Это отношение мало изменилось и после того, как немецкий математик Михаил Штифель дал в 1544 г. новое определение отрицательных чисел как чисел, «меньших, чем ничто», т. е. меньших нуля. Несмотря на то что эта точка зрения означала шаг вперед в деле теоретического обоснования отрицательных чисел, общая неясность относительно природы новых чисел не исчезла. Люди долгое время не могли привыкнуть к мысли, что существует величина «меньше, чем ничто...». Сам Штифель писал: «Нуль находится между истинными и абсурдными числами...»

В XVII в. математика, механика, астрономия получили широкое развитие. Отрицательные числа, применение которых значительно облегчило математические вычисления, все более прочно входят в математику. Еще в 20-х годах XVII в. ученик Стевина, фламандский математик А. Жирар, решая уравнения, систематически учитывает и отрицательные корни и пользуется отрицательными числами наравне с положительными.

В знаменитом произведении французского математика, физика и философа Декарта «Геометрия», изданном в 1637 г., описывается геометрическое истолкование положительных и отрицательных чисел; положительные числа изображаются на числовой оси точками, лежащими *вправо* от начала 0, отрицательные — *влево*.

Геометрическое истолкование положительных и отрицательных чисел привело к более ясному пониманию природы отрицательных чисел, способствовало их признанию. Представляя положительные и отрицательные корни уравнений противоположно направленными отрезками, Декарт тем самым считал, что эти корни равноправны, одинаково реальны, хотя и продолжал по традиции называть одни истинными, другие — ложными.

Однако, ввиду того что правила умножения и деления с отрицательными числами по-прежнему оставались необоснованными, даже в XVIII в. все еще продолжался спор между учеными

о том, можно ли признавать отрицательные числа действительно существующими самостоятельно, как и числа положительные. Такое признание отстаивали, в частности, Ньютон, Эйлер и почти все русские математики того времени. Всеобщее признание отрицательные числа получили в первой половине XIX в., когда была развита достаточно строгая теория положительных и отрицательных целых чисел.

Рене Декарт.

6. О координатах

Идея координат зародилась в древности. Первоначальное их применение связано с астрономией и географией, с потребностью определять положение светил на небе и определенных пунктов на поверхности Земли при составлении календаря, звездных и географических карт. Знаменитый древнегреческий астроном Клавдий Птолемей (II в). уже пользовался долготой и широтой в качестве географических координат. Следы применения идеи прямоугольных координат в виде квадратной сетки (палетки) обнаружены на стене одной из погребальных камер Древнего Египта[1]. Прямоугольной сеткой пользовались и художники Возрождения.

Общематематическое значение метода координат открыли и впервые выявили французские математики XVII в. П. Ферма и Р. Декарт. Изложение метода координат было впервые опубликовано в «Геометрии» Декарта в 1637 г. Отсюда и названия: «Декартова система координат», «Декартовы координаты».

Термины «абсцисса», от латинского abscissus — отсекаемый (отрезок на оси иксов), «ордината» от латинского ordinatus — упорядоченный (отрезок на оси[2] игреков) восходят к латинскому переводу (XVI в.) сочинений великого древнегреческого математика Аполлония и были введены в употребление в 70—80-х гг. XVII в. Г. В. Лейбницем. Им же абсцисса вместе с ординатой были названы *координатами.*

§ 5. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

7. Что такое ломаное число?

На протяжении многих веков на языках разных народов ломаным числом именовали дробь.

---

[1] В погребальной камере пирамиды отца Рамсеса II на стене имеется сеть квадратиков. С их помощью перенесено изображение в увеличенном виде.

[2] Ординатами первоначально называли отрезки, параллельные оси *OY.*

Необходимость в дробях возникла на очень ранней ступени развития человеческого общества. Так, по-видимому, дележ десятка плодов между членами большой семьи или добычи, состоявшей из двух-трех кроликов, между бóльшим числом участников охоты заставлял людей обращаться к дробям — открывать их. Первой дробью, с которой раньше других встретились люди, была половина.

Понятие о дроби как о части числа и как о некотором количестве долей единицы можно найти уже в папирусах Древнего Египта и в глиняных табличках вавилонян.

Понятие дроби, как и целого числа, с течением веков развивалось и расширялось. Греки — Евклид (III в. до н. э.) в «Началах» и Никомах (I в н. э.) в «Введении в арифметику» избегали обращаться к дробям, так как они не принимали их за числа. Архимед (287—212 гг. до н. э.) хотя и пользовался дробями, но за числа их не признавал.

Позже в продолжение нескольких веков дроби или ломаные числа рассматривали как собрание равных долей единицы, но не считали их числами. Название «ломаное число», существовавшее у многих народов, ведет свое начало от арабов и через Леонарда Пизанского (Фибоначчи) вошло в большинство европейских руководств по арифметике. В нашей стране это название существовало до XIX в.

Еще в XVII в. многие даже крупные математики того времени, например Валлис, полагали, что дробь не является числом, поскольку отвечает на вопрос «какое количество?», а не на вопрос «сколько?». Только во второй половине XVIII в. сложилось понятие о дроби, соответствующее общему определению числа, установленного И. Ньютоном. Он определял число как отношение одной величины к другой того же рода, принятой за единицу. Под это определение подходило и понятие дроби.

Великий математик Эйлер — член Петербургской Академии наук в «Универсальной арифметике» (1787 г.) указал, что понятие $\frac{7}{3}$ столь же правомерно, как и понятие $\frac{1}{2}$, хотя оно и не целое число, но мы познаем его как особый род чисел, которые *дробями* или *ломаными числами* называются.

Различают три типа дробей: 1) единичные дроби (аликвоты) или доли, например $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и т. д.; 2) дроби систематические, т. е. дроби, у которых знаменатель выражается степенью числа, принятого для данного вида дробей, например степенью 10 или 60. Такими дробями со знаменателями 60, $60 \cdot 60$, $60 \cdot 60 \cdot 60$ и т. д. пользовались и производили с ними различные операции в древности вавилонские мудрецы; 3) дроби общего вида, у которых числителем и знаменателем может быть любое целое число.

Дроби, у которых числитель больше знаменателя, в средние века называли «ложными» в противовес правильным дробям, ко-

торые называли «реальными». Лишь со второй половины XVIII в. распределение дробей на ложные и реальные исчезло.

В современной арифметике дробью называют пару натуральных чисел, одно из которых *(знаменатель)* показывает, на сколько равных долей разделен элемент, а другое *(числитель)* — сколько таких долей взято.

Прототип современного вида записи дробей изобретен в Индии в VIII в. Затем эта запись проникла в страны Средней Азии и оттуда перешла в Европу.

8. Древнекитайская задача с дробями

В Древнем Китае пользовались десятичной системой счисления[1]. При записи чисел употребляли цифры в форме иероглифов, причем имелся особый знак для некоторых единиц высших разрядов. Однако эти цифры применяли в основном только для записи чисел.

Для вычислений довольно часто использовалась таблица умножения, которую в то время называли «девятью девять».

Чтобы облегчить выполнение арифметических действий с большими числами (вплоть до одиннадцатизначных), сложение и вычитание производили на счетной доске. Вычисления на счетной доске проводились с помощью палочек, изготовлявшихся из бамбука, чугуна или слоновой кости.

Примерно во II в. н. э. был составлен трактат «Математика в девяти книгах». Эта книга была предназначена для землемеров, техников и счетных работников и содержит изложение правил действий над дробными числами, вычисление площадей, объемов[2] и т. п. Вот одна задача из VI книги этого сочинения:

Задача 4. «Дикая утка от южного моря до северного летит 7 дней. Дикий гусь от северного моря до южного летит 9 дней. Теперь дикая утка и дикий гусь вылетают одновременно. Через сколько дней они встретятся?»

Задание ученикам. Решить задачу с дробями, взятую из древнего астрономического трактата, который назван «Солнечные часы».

Задача 5. «Имеются два сорта чая. 3 фунта первого сорта смешаны с 6 фунтами второго, после чего фунт смеси стоит 3 дяо. Если смешать 12 фунтов первого с 4 фунтами второго, то фунт смеси будет стоить $3\frac{1}{2}$ дяо. Сколько стоит фунт первого и сколько стоит фунт второго сорта?»

---

[1] С мультипликативным принципом записи чисел.

[2] «Математика в девяти книгах» и «Математический трактат Сунь-цзы» (III в.) вошли позже в трактат «Математическое десятикнижье» (VII—IX вв.).

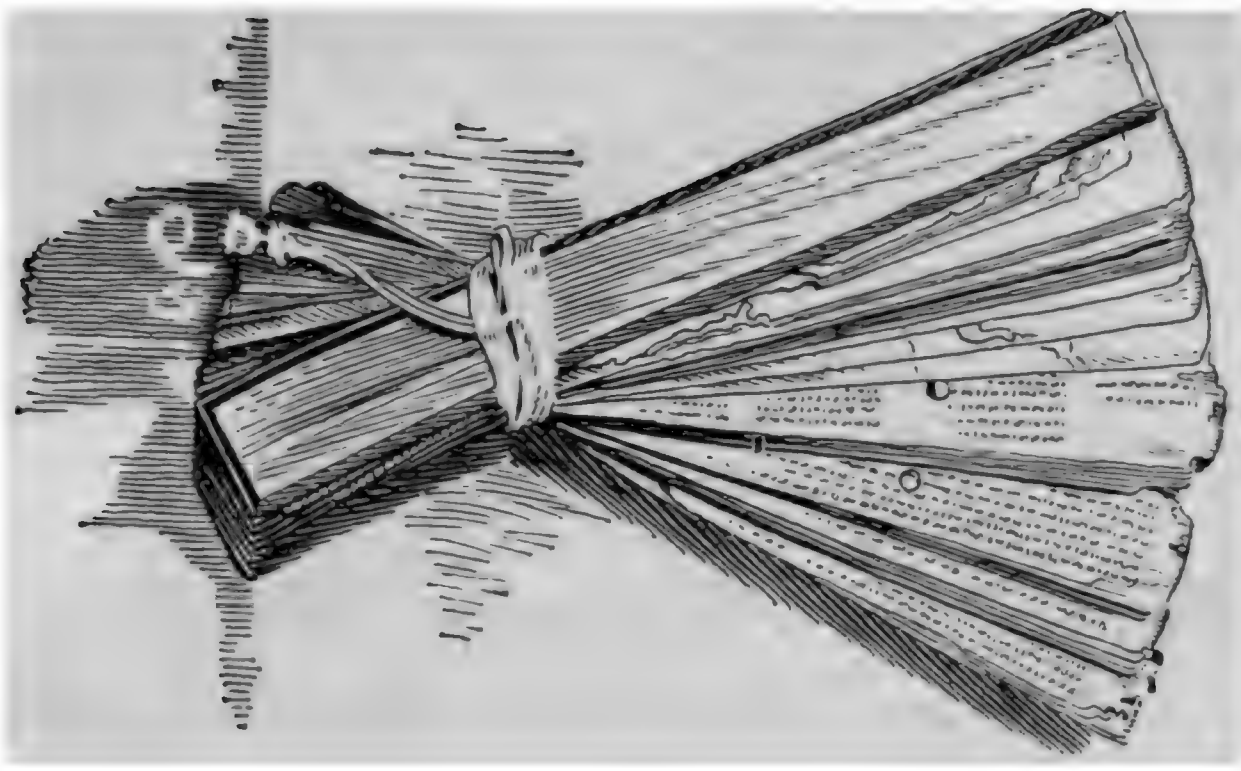


Рис. 54. Вид одной из копий (XIII в.) рукописи «Лилавати», написанной на полосках пальмовых листьев, до того как бумага стала общеупотребительной.

9. Староиндийская задача с цветами и пчелами

Индия, одна из древнейших и величайших стран мира, является родиной позиционной десятичной нумерации. Эта система (с употреблением знака нуля) появилась в Индии, вероятно, в V—VII вв. н. э. Из Индии благодаря арабским и среднеазиатским ученым она распространилась в страны Европы[1].

Индийцы широко употребляли «обыкновенные» дроби. Наше обозначение обыкновенных дробей при помощи числителя и знаменателя было принято в Индии еще в VIII в. н. э., однако без дробной черты. Вместо $\frac{1}{3}$, например, индийцы писали $\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}$. Дробная черта стала применяться лишь в XIII в.

Широко известны математики Древней Индии Ариабхатта (V в.), Брахмагупта (VII в.), изложивший правила действий с дробями, мало отличавшиеся от наших, и Бхаскара (XII в.). Последний написал книгу под названием «Лилавати» (рис. 54), т. е. «Прекрасная» (наука арифметика).

Индийские ученые нередко излагали арифметические задачи в стихах. Решим одну древнеиндийскую задачу (математика Сриддхары XI в.):

Задача 6.

«Есть кадамба цветок,
На один лепесток
Пчелок пятая часть опустилась.
Рядом тут же росла
Вся в цвету сименгда
И на ней третья часть поместилась.

[1] Подробнее см. гл. 7, § 5.

Разность их ты найди,
Ее трижды сложи
И тех пчел на Кутай посади.
Лишь одна не нашла
Себе места нигде
Все летала то взад, то вперед и везде
Ароматом цветов наслаждалась.
Назови теперь мне,
Подсчитавши в уме,
Сколько пчелок всего здесь собралось».

Задание ученикам. Решить следующую задачу из «Лилавати» Бхаскары:

Задача 7. «Если некоторое число умножить на 5, от произведения отнять его треть, остаток разделить на 10 и прибавить к этому последовательно $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ первоначального числа, то получится 68. Как велико это число?»

10. Задачи с дробями у древних армян

Известно, что первым государством на территории СССР было царство Урарту в Закавказье (IX в. до н. э.). Остатки урартских крепостей и дворцов, сохранившихся до наших дней в Армянской ССР, говорят о высоком развитии урартской архитектуры, которое немыслимо без высокого уровня математических знаний. Урарты, позаимствовавшие у ассирийцев клинопись, возможно, были знакомы с вавилонской математикой. Высокая культура, созданная жителями Урарту, была унаследована древними армянами. В IV—V вв. н. э. армяне, находившиеся тогда под властью персов и византийцев, создали собственный алфавит, который служил им и для письменной нумерации. Армянская алфавитная нумерация имела обозначения не только для единиц, десятков, сотен (как славянская, ионийская и еврейская), но и для тысяч [1].

В VII в. н. э. жил известный армянский ученый Анания Ширакаца (из Ширака), который прославился также как борец за освобождение своей родины от иностранных захватчиков. Анания писал книги по математике, географии и астрономии. Он составил, помимо обширных таблиц сложения, вычитания и умножения, специальные таблицы пар сомножителей, произведение которых равно 6000. Этот труд, названный «Шеститысячником», мог применяться при делении чисел. Среди книг Анания имеется также арифметика и сборник задач, названный «Вопросы и решения».

---

[1] О математике в Грузии см.: Цхакая Г. История математических наук в Грузии с древних времен до начала XX в., Изд-во АН Груз. ССР, 1959.

1300 лет назад Анания решал задачи на дроби, которые даже для многих ученых из Европы в то время казались трудными.

Вот содержание одной из них:

Задача 8. «Один купец прошел через 3 города, и взыскивали с него в первом городе пошлины половину и треть имущества и во втором городе половину и треть (с того, что осталось), в третьем городе снова половину и треть (с того, что у него было), и, когда он прибыл домой, у него осталось 11 денежков (денежных единиц). Итак, узнай, сколько всего денежков было вначале у купца».

Задание ученикам. Решить следующую задачу Анания из Ширака:

Задача 9. «В городе Афинах был водоем, в который проведены 3 трубы. Первая могла наполнить водоем в 1 час, вторая — в 2 часа, третья — в 3 часа. Узнай, в какую часть часа все 3 трубы вместе наполнили водоем».

11. «Арифметика» Магницкого. Ломаные числа

Перед нами титульный лист и страница (рис. 55, 56) первого русского печатного учебника математики, получившего широкое распространение «Арифметики» Магницкого[1]. Книга эта была издана в 1703 г.

Вот что пишет автор: «Арифметика или числительница есть художество честное, независтное, всем удобопонятное, многополезнейшее и многохваленнейшее...». Тут слово «художество» употреблено в смысле «искусство». Греческие авторы употребляли выражение «арифметике техне», т. е. «числовое искусство» («арифмос» — число, «техне» — искусство).

На первой странице книги изображен дворец науки (рис. 56). На престоле сидит царевна «Арифметика», в ее правой руке символический ключ — это ключ ко всем знаниям. Без арифметики нет доступа к другим наукам. К познанию арифметики ведут пять ступеней: счисление, сложение, вычитание, умножение и деление.

В первой части первой книги «Арифметика» изложена нумерация целых чисел и все действия с целыми числами, а во второй части рассматриваются числа ломаные, т. е. дроби.

На вопрос, что есть число ломаное, автор отвечает: «Число ломаное не что же иное есть, токмо часть вещи, числом объявленная, сиречь полтина есть половина рубля, а пишется сице $\frac{1}{2}$ рубля, или $\frac{1}{4}$, или пятая часть $\frac{1}{5}$, или две пятые части $\frac{2}{5}$ и всякии вещи яковые либо часть, объявлена числом, то есть ломаное число».

---

[1] Напечатанная в 1689 г. в Амстердаме на русском языке краткая арифметика И. Ф. Копиевича (или Копиевского) распространения не получила.

Рис. 55. Заглавный лист «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.

Рис. 56. Первая страница «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.

В книге Магницкого много задач с разным содержанием, много забавных задач. Решите одну из них:

З а д а ч а 10. «Един человек выпьет кадь пития в 14 дней, а со женою выпьет тое же кадь в 10 дней. И ведательно есть, в колико дней жена его особне выпьет тое же кадь».

Задание ученикам. Решить следующую задачу из «Арифметики» Магницкого:

З а д а ч а 11. «Некий человек нанял работника на год, обещал ему дати 12 рублев и кафтан. Но той, работав 7 месяцев, восхотел уйти и просил достойной платы с кафтаном. Хозяин дал ему по достоинству расчет 5 рублей и кафтан, и ведательно есть, а коликие цены оный кафтан был».

12. О простых числах. Евклид, Эратосфен, Чебышев

Разложение чисел на простые множители показывает, что всякое число является либо простым, либо произведением двух или нескольких простых чисел. Можно поэтому сказать, что

Евклид.

простые числа являются составными элементами натуральных чисел, как бы кирпичами, из которых при помощи действия умножения составляются все целые числа. Вот почему простыми числами начали интересоваться еще в древности. Издавна бросалась в глаза нерегулярность распределения простых чисел среди всех натуральных чисел. Было замечено, что по мере продвижения от малого числа к большему в натуральном ряду простые числа встречаются все реже. Поэтому одним из первых вопросов был такой: существует ли последнее простое число, т. е. имеет ли ряд простых чисел конец? Около 300 лет до н. э. на этот вопрос дал отрицательный ответ знаменитый древнегреческий математик Евклид. Он доказал, что за каждым простым числом имеется еще большее простое число, т. е. *существует бесчисленное множество простых чисел.* Другой греческий математик того же времени — Эратосфен изобрел способ, посредством которого можно найти все простые числа от 1 до некоторого определенного числа. Этот способ называется «решетом Эратосфена». Пусть, например, требуется найти все простые числа между 1 и 50. Выписываем все числа от 1 до 50:

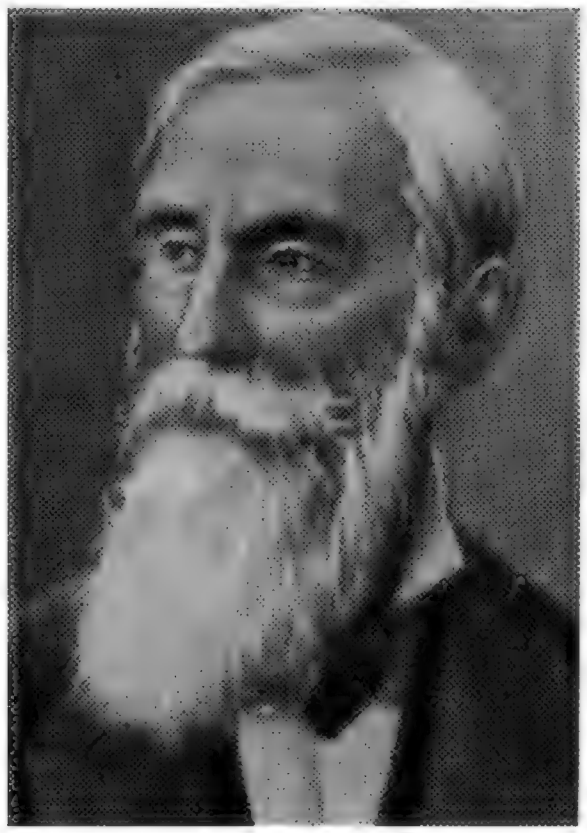
~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~

Зачеркиваем единицу, которая не является ни простым, ни составным числом [1], затем подчеркиваем число 2 и зачеркиваем все числа, *кратные двум,* т. е. все числа таблицы, «через одно», начиная с 2. Далее подчеркиваем из незачеркнутых чисел 3 и зачеркиваем все числа, кратные трем, т. е. «через два» и т. д. Оказывается, что между 1 и 50 имеются следующие 15 простых

[1] Каждое простое число P имеет два и только два делителя: 1 и P; каждое составное число имеет больше двух делителей; единица же имеет только один делитель: 1.

чисел: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47. Этим способом в настоящее время составлены таблицы простых чисел между 1 и 12 000 000.

Для получения таблицы простых чисел Эратосфен, писавший на натянутом папирусе, не зачеркивал, а прокалывал составные числа. Отсюда название «решето Эратосфена»; оно отсеивает простые числа.



П. Л. Чебышев

После Евклида и Эратосфена многие другие ученые разных стран и времен стремились глубже познать природу простых чисел. Особенно хотелось найти такую формулу, которая позволяла бы быстро узнать, сколько простых чисел имеется между 1 и любым числом натурального ряда. Лишь в XIX в., около 2200 лет после Евклида, великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев открыл формулу[1], позволяющую приближенно подсчитать простые числа на любом участке натурального ряда. Начиная со второй половины XX в. для поисков больших простых чисел применяются электронные счетные машины. С их помощью доказана простота таких числовых гигантов, как:

$$2^{2281}-1;\ (750\ \text{цифр});\quad 2^{3217}-1;\ (1\,000\ \text{цифр})\ \text{и др.}^{2}.$$

Задание ученикам. Представить каждое число от 4 до 30 в виде суммы двух или трех простых чисел.

13. О задаче Гольдбаха. Нерешенные задачи теории чисел

Мы часто представляем составные числа как произведение простых чисел. А можно ли представить всякое натуральное число в виде *суммы* простых чисел?

Более 200 лет назад член Петербургской Академии наук Христиан Гольдбах (1690—1764) высказал такое предположение: всякое нечетное целое число, большее 5, можно представить в виде суммы трех простых чисел. Проверка на отдельных примерах показала справедливость этого предположения. Так, например:

$$13=3+5+5;\ 23=5+7+11\ \text{и т. п.}$$

---

[1] Функция $\pi(x)$, число простых чисел, не превосходящих x, удовлетворяет неравенствам: $a\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b\frac{x}{\ln x}$, где a и b — постоянные, вычисленные Чебышевым ($a=0{,}921$; $b=1{,}06$) и уточненные после него.

[2] См. также гл. 7, § 3.

Л. Г. Шнирельман.

И. М. Виноградов.

Однако, чтобы быть уверенным в том, что данное свойство справедливо для любых сколь угодно больших целых чисел, нужно найти общее доказательство. В 1742 г. Гольдбах обратился по этому вопросу к знаменитому математику Петербургской Академии наук Леонарду Эйлеру. Эйлер ответил, что он не может доказать это свойство, но высказал такое предположение: всякое четное число, больше 2, можно представить в виде суммы двух простых чисел. Например: $8=3+5$; $28=11+17$ и т. д.

Если можно было бы решить «задачу Эйлера», т. е. доказать второе свойство, то легко было бы решить и «задачу Гольдбаха», а именно: пусть имеем какое-либо целое число. Либо оно четное, тогда оно разлагается на сумму двух простых чисел (утверждение Эйлера), либо оно нечетное, тогда вычтем из него нечетное простое число (допустим 3) и останется четное число, которое разложится в сумму двух также простых чисел (по Эйлеру) так, что всегда данное целое число разложится на сумму не более трех простых чисел.

На протяжении 200 лет над доказательством предложения Гольдбаха тщетно трудились многие крупные ученые, в том числе создатель теории множеств Георг Кантор (1845—1918), проверивший предложение для всех четных чисел от 4 до 1000, Обри — от 1000 до 2000 (в этих пределах каждое четное число было ими разложено на сумму двух простых чисел) и др.

Первый крупный успех в решении задачи Гольдбаха был достигнут молодым советским математиком Львом Генриховичем Шнирельманом (1905—1938), доказавшим в 1930 г., что всякое целое число может быть представлено в виде суммы не более чем k простых чисел, где k — некоторое вполне определенное, но нам неизвестное число. Решение задачи Гольдбаха было сведено, таким образом, к доказательству того, что k («число Шнирельмана») равно 3. Вначале k оценивалось в порядке сотен тысяч, но вскоре благодаря дальнейшим трудам некоторых советских и зарубежных математиков удалось значительно умень-

шить оценку «числа Шнирельмана». В настоящее время k доведено до 20.

Крупнейшего успеха на пути к решению задачи Гольдбаха достиг в 1937 г. советский математик, Герой Социалистического Труда, академик Иван Матвеевич Виноградов (род. в 1891 г.), доказав, что всякое достаточно большое[1] нечетное число может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. Результат, полученный академиком Виноградовым, является одним из блестящих математических достижений первой половины XX в. Тем не менее задачу Гольдбаха — Эйлера поныне нельзя считать полностью решенной ввиду того, что в доказательстве Виноградова речь идет не о всех, а только о нечетных числах, причем достаточно больших.

Задание ученикам. а) Проверить на примере двух трехзначных чисел предложение Гольдбаха. б) Проверить на примере двух четных трехзначных чисел свойство, высказанное Эйлером.

14. Ал-Хорезми и его «Арифметика»

На территории нашей Родины, начиная с VIII в., стала расцветать культура и наука народов Средней Азии. Средняя Азия в то время входила в состав огромной империи, образовавшейся в результате арабских завоеваний VII—VIII вв. Мусульманская религия — ислам — и арабский язык были распространены во всех областях нового феодального государства — *арабского халифата,* названного так потому, что во главе его стояли «халифы», «преемники» основателя ислама Мухаммеда. В новом государстве процветали ремесленное мастерство, торговля и наука. Самым большим научным центром халифата был город Багдад (ныне столица Ирака). Среднеазиатские города Самарканд, Хорезм (ныне Ургенч), Бухара и др. тоже стали крупными культурными центрами. Многие видные ученые были родом из Хорезма.

Арабы торговали со многими странами, в том числе с Византией и Индией. Торговля же имела большое значение для передачи культурных достижений. Вот почему наука стран халифата была тесно связана с греческой и индийской наукой.

Ученые, и в первую очередь математики Средней Азии и Закавказья (хорезмийцы, таджики, узбеки, азербайджанцы и др.), популяризировали позиционную систему счисления, распространяли математические знания, заимствованные из Греции и Индии, и обогащали науку собственными открытиями. В силу некоторых исторических условий многие открытия ученых стран

---

[1] «Достаточно большое», т. е. начиная с некоторого большого числа C. В 1956 г. советский математик К. Г. Бороздкин установил, что верхняя оценка $C = 3^{3^{16}}$ (точнее $e^{e^{16,038}}$, где $e = 2{,}7182...$).

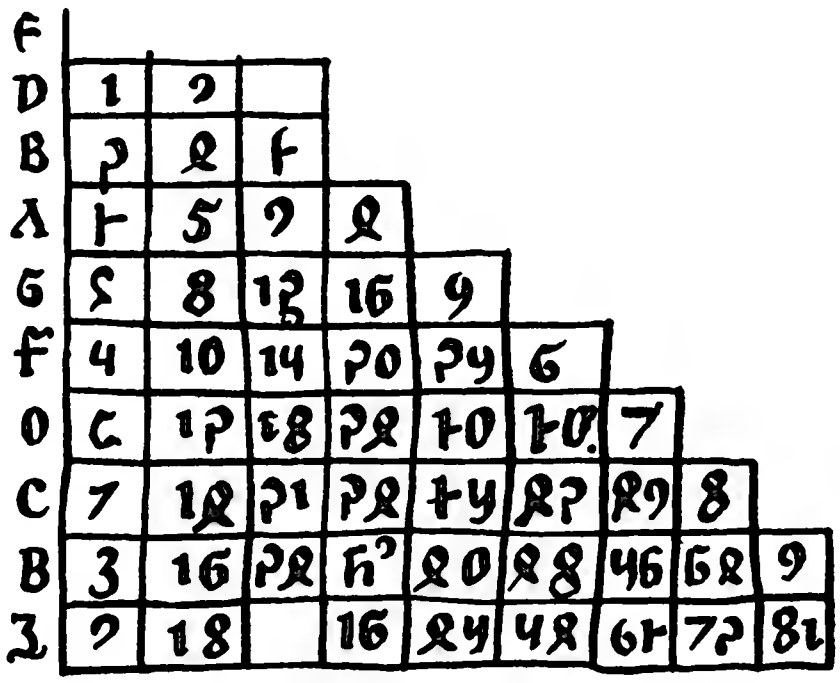


Рис. 57. Таблица умножения из книги ал-Хорезми.

Ближнего и Среднего Востока стали известны в Европе лишь после того, как были там заново открыты.

Известный хорезмский математик и астроном Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми (780—850), как и все ученые стран ислама, писал свои произведения на арабском языке. Сохранились пять сочинений ал-Хорезми, одно из которых посвящено арифметике. Последнее дошло до нас только в латинском переводе, восходящем к середине XII в. и начинающемся словами: «Алгоритми сказал...» Слово «Алгоритми» — латинизированное ал-Хорезми. Ввиду того что арифметический труд ал-Хорезми (рис. 57), содержащий первое на арабском языке изложение десятичной позиционной нумерации, сыграл огромную роль в распространении новой нумерации в Европе, то по его имени стали называть «алгоризмом», «алгоритмом» или «алгорифмом» новую для Европы того времени арифметику, основанную на позиционной десятичной системе, а ее последователей — «алгорифмиками». Слово «алгоритм», или «алгорифм», широко употребляется в математике в настоящее время, оно означает правило, следуя которому можно решить задачу определенного типа, выполняя в установленном порядке ряд действий [1].

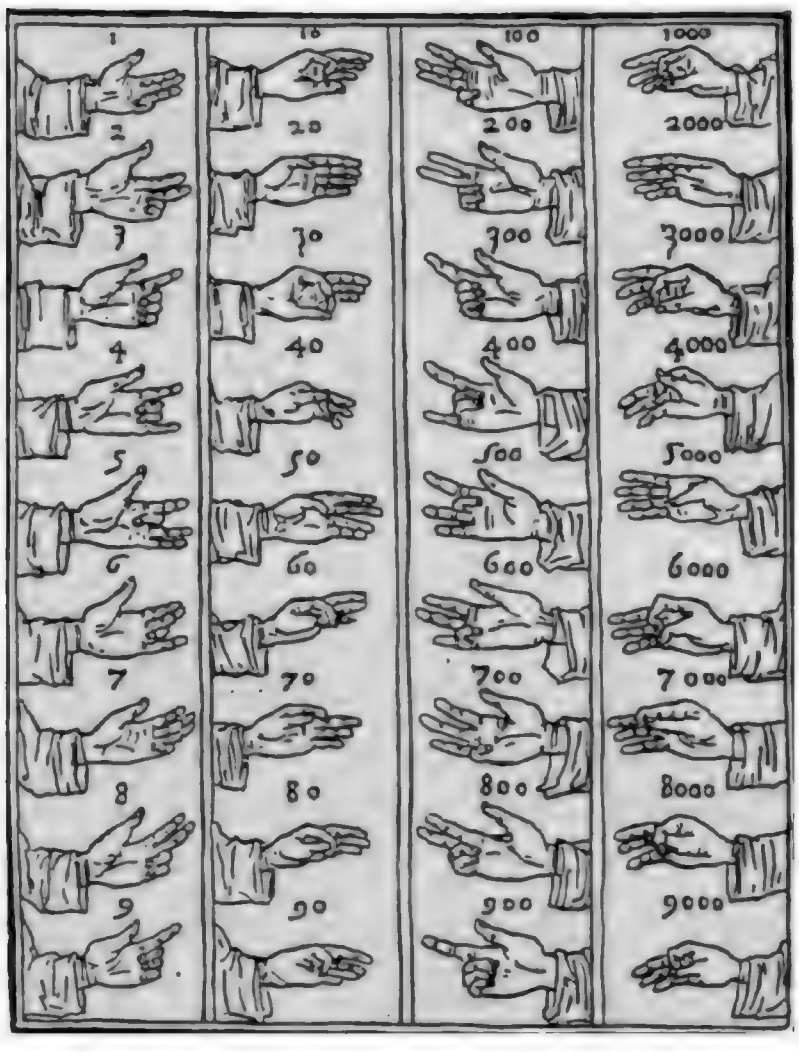


Рис. 58. Пальцевый счет. (Из «Арифметики» Л. Пачоли.)

Задание ученикам. Решите задачу из «Арифметики» ал-Хорезми (см. № 64).

15. Абацисты и алгоритмики в средневековой Европе

До XI в. в Западной Европе арифметика изучалась по книге Никомаха (гл. 1, § 1; 11) или по сокращенной ее переработке, сделанной римским автором Боэцием (V—VI вв.). Арифметические действия и вычисления производились ли-

[1] См. гл. 7, § 2.

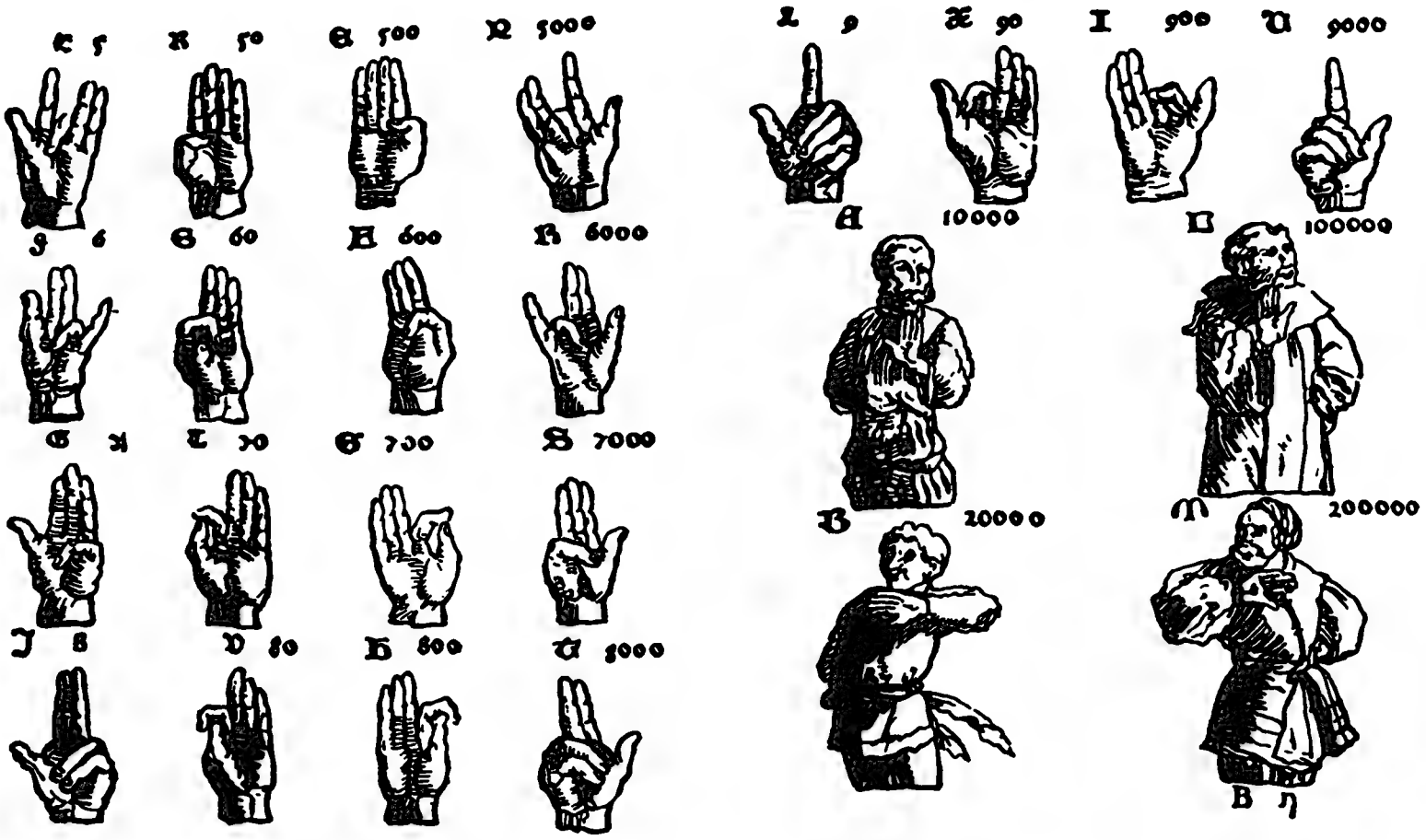


Рис. 59. Пальцевой счет. (Из книги, напечатанной в 1522 г.)

бо с помощью пальцев рук (рис. 58, 59), либо на абаке. В X в. видный европейский математик, французский монах Герберт (впоследствии папа Сильвестр II) усовершенствовал абак (рис. 60). Вместо счетных камешков он употреблял жетоны с надписанными на них, им же изобретенными, цифрами. Он назвал цифры «апексами» (от латинского слова apices, имеющего несколько значений, в том числе и «письмена»). От них, как считают некоторые ученые, происходят современные цифры. Абак с апексами употреблялся лишь в некоторых монастырских школах и широкого распространения не нашел.

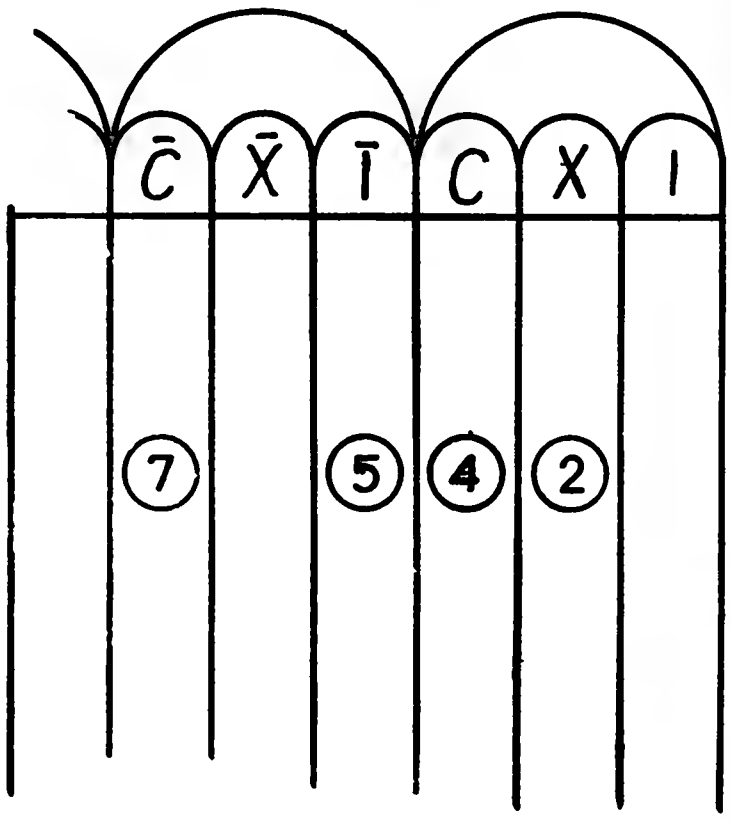


Рис. 60. Абак Гербарта. Вместо камешков жетоны.

Рис. 61. Абацисты.

Рис. 62. В центре — муза арифметики. Справа в лице Пифагора изображен абацист, исчисляющий «на линиях». Слева — алгорифмик, в лице Боэция, считает «пером». (Из книги Г. Рейша «Философская жемчужина», напечатанной в 1503 г.)

Рис. 63. Титульный лист книги А. Ризе «Счет на линиях и пером». 1532 г.

Только в XII в. значительно возросло число «алгорифмиков», которые уже не употребляли счетной доски, а пользовались новой десятичной позиционной системой счисления и шестидесятеричными дробями. В отличие от них последователи старой школы, «абакисты», или «абацисты», пользовались абаком, римской нумерацией, римскими цифрами и двенадцатеричными дробями. Долго длилась борьба между последователями обеих систем. Десятичная позиционная система счисления не была воспринята сразу. Абацисты, церковь и власти ожесточенно сопротивлялись распространению новой системы.

Церковь на протяжении многих веков систематически выступала против прогресса науки и просвещения (см. гл. 7, § 9), против всяких новшеств, которые сделали бы грамоту и образование доступными всему народу и подрывали бы основу веры и авторитет церковных властей.

Преимущества десятичной позиционной системы счисления были, однако, столь велики, что она все больше и больше вытесняла неудобную старую римскую нумерацию. Фабричное производство бумаги, начатое в XIII в., в значительной мере способствовало исчезновению абака и победе алгорифмиков. Однако лишь в XVII в. новая нумерация полностью восторжествовала в Европе (см. гл. 7, § 5, 6). С тех пор и применяются современные правила и способы вычисления (рис. 61—63).

16. От натуральных к дробным числам

Еще задолго до того как люди узнали о бесконечности натурального ряда, они в труде прокладывали пути к новым числам, отличным от натуральных, к дробным. Дроби нужны были при измерении величин и при делении целого между различными лицами (см. гл. 1, § 1; 8).

Люди на практике открывали связи между числами и устанавливали правила действий над ними. И если первоначально под «числами» понимались только натуральные, целые числа, то с введением дробей понятие числа развилось, стало более широким. Дробные числа подчиняются тем же законам, что и целые: переместительному, сочетательному, распределительному. Всякое натуральное число является частным видом дробного числа. Например, число 5 можно представить как $\frac{5}{1}$; $\frac{10}{2}$, или 5,0 и т. п. Нуль также можно рассматривать как дробное число $\frac{0}{1}$; $\frac{0}{2}$ и т. п. Это значит, что множество дробных чисел включает в себя и все целые числа. Благодаря расширению понятия числа мы получили возможность делить целое число на любое другое целое число, за исключением нуля.

Итак, расширение понятия числа, переход от натуральных к дробным числам отвечает практическим потребностям измерения и деления целого на части и теоретическим потребностям деления любых целых чисел.

В старших классах мы узнаем о том, что расширение понятия числа не останавливается на дробных числах. Мы изучим новые виды чисел.

17. О периодических дробях

При вычислениях с обыкновенными дробями часто оказывается целесообразным выразить их десятичными дробями, так как арифметические действия над последними выполнять проще.

Обращением обыкновенных дробей в десятичные занимались еще в XVII в. итальянский математик Бонавентура Кавальери, английский математик Джон Валлис и другие. Эти ученые встретились с *периодическими дробями,* связанными с процессом бесконечного деления. В XVIII в. периодические дроби изучались также немецким ученым Иоганном Ламбертом (1728—1777) и Леонардом Эйлером. Полная теория периодических дробей была разработана в начале XIX в. немецким математиком Карлом Фридрихом Гауссом (1777—1855).

Термин «период» для бесконечно повторяющейся группы цифр происходит от греческого слова «периодос» — обход, вращение по окружности.

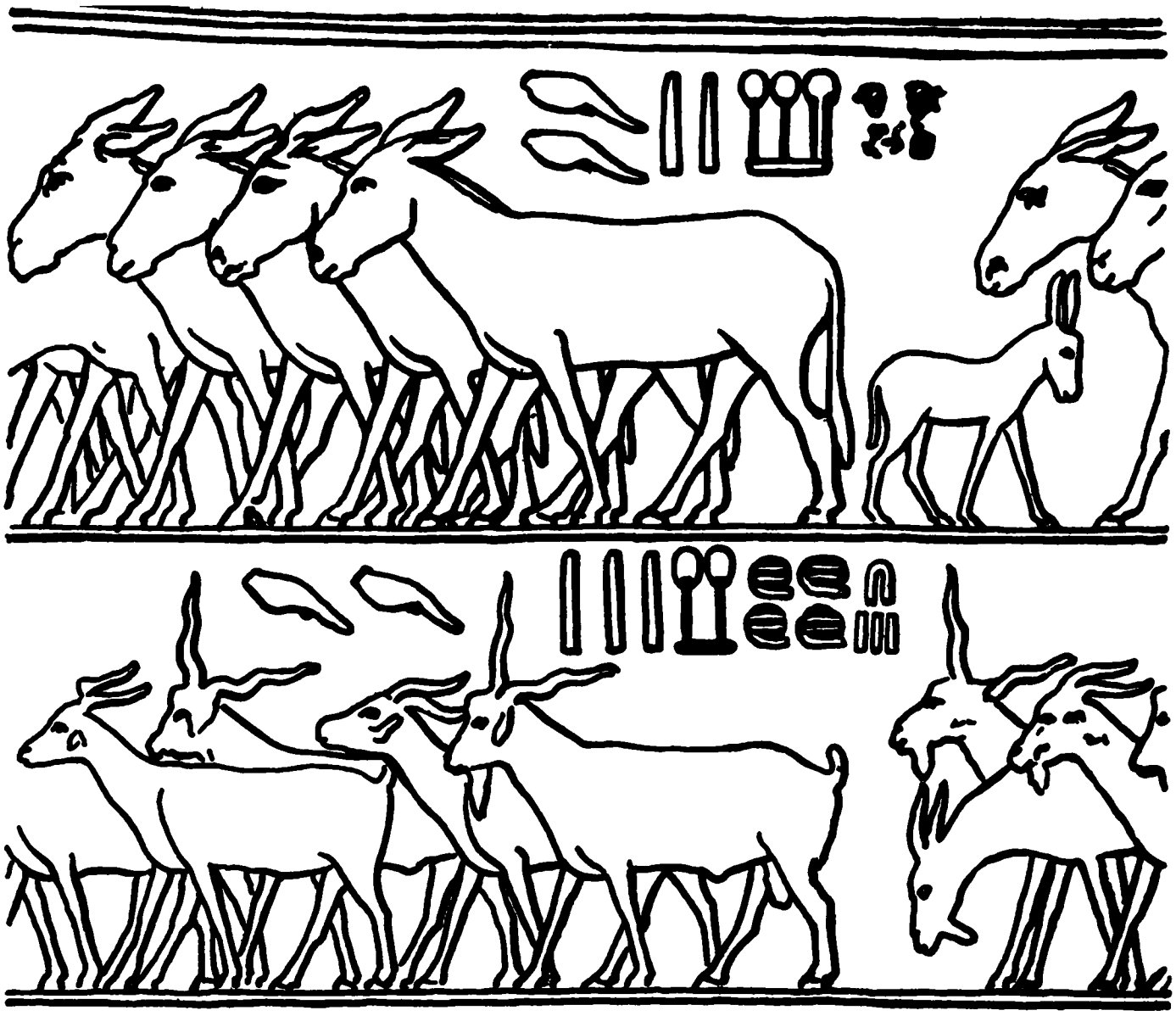


Рис. 64. Отрывок древнеегипетского инвентаря стад. Сверху число 223 000, ниже 232 413. (Надпись на могиле фараона.)

18. Древнеегипетская задача с дробями

Решим следующую задачу из папируса Ахмеса (рис. 21, 64).

З а д а ч а **12.** «Приходит пастух с 70 быками. Его спрашивают: — Сколько приводишь ты из своего многочисленного стада?

Пастух отвечает:

— Я привожу две трети от трети скота. Сочти!»

(Узнать, сколько быков было во всем стаде.)

19. Из истории нуля

При записи десятичной дроби мы часто прибегаем к цифре 0. Происхождение, название и знак нуля имеют интересную историю.

В любой абсолютной позиционной нумерации требуется в случае необходимости знак, выражающий отсутствие разряда в числе. Еще в Древнем Вавилоне, где впервые была развита шестидесятеричная позиционная нумерация, появился примерно в V в. до н. э. значок для отделения десятичных, а позже и шестидесятеричных разрядов (см. гл. 1, § 1; 10), который, однако, систематически не применялся [1].

[1] Возможно потому, что в шестидесятеричной нумерации числа с отсутствующими разрядами встречаются реже, чем в десятеричной системе.

Греческие астрономы, которые пользовались шестидесятеричными дробями, ввели для разделения разрядов особый знак, имеющий форму буквы 0 (омикрон, первая буква в греческом слове «онден», означающем «ничего»). В VII в. в Древней Индии уже употреблялась десятичная позиционная система счисления и вместе с ней систематически применялся нуль, который обозначали точкой, а также кружочком. Некоторые ученые считают, что кружочек для нуля введен греками.

Нуль индийцы называли «сунья», что означало «пустое», в смысле отсутствия разряда в числе. Арабы, от которых европейцы переняли десятичную позиционную систему счисления, перевели индийское «сунья» арабским словом «ас-сифр». Вот почему до XVII в. нуль называли «цифрой». Так его называет и Магницкий в своей «Арифметике». Для европейцев индийская арифметика и, в частности, нуль считались вначале какой-то тайной. Поэтому стали давать наименование «цифр» или «шифр» всякой тайнописи. Слово «нуль» происходит от латинского слова «Nulla», означающего «никакая» (значащая цифра).

В настоящее время нуль — это не просто знак для отделения разрядов, а *число,* которое можно складывать, вычитать, умножать и делить, как и другие числа. Единственное ограничение — делить на нуль нельзя.

20. О коэффициенте

Применяя числовой коэффициент, Диофант его пишет после знака неизвестной. Вместо нашего $8x^3$, например, Диофант пишет K^{ν}_{η}, т. е. $x^3 8$ и т. д. Диофант называл коэффициент «множеством».

Коэффициентом пользовались и древнеиндийские ученые. Многие европейские математики XVI—XVII вв. не пользовались постоянным термином для понятия коэффициента. Так, например, Декарт говорил об «известной величине» в члене уравнения, другой французский математик, Лопиталь (1661—1704), — об «умножающей величине», Ньютон писал то «предстоящее число», то «известная величина», то «член».

Термин «коэффициент», от латинского coefficiens — *содействующий* (подразумевается *множитель*), ввел Виет, однако в современном смысле его употребляли систематически лишь в XVII в. английские математики Оутред и Валлис, французский математик Дешаль и другие.

21. Число и отношение

При решении разнообразных практических задач часто приходится сравнивать однородные величины между собой и находить отношение величин, выраженное целым или дробным числом.

В древности и почти на всем протяжении средних веков под числом понималось только натуральное число, собрание единиц, полученное в результате счета. Отношение же, будучи результатом деления одного числа на другое, не считалось числом.

Но уже в трудах среднеазиатских математиков Омара Хайяма (1048—1131) и Насирэддина ат-Туси (1201—1274) высказана мысль о том, что *отношение есть число* и что над отношениями можно производить все действия, которые производятся над целыми числами.

Явно новое определение числа было дано впервые в XVII в. гениальным английским ученым Исааком Ньютоном. В своей «Всеобщей арифметике» он писал: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу».

Это определение включает как целые, так и дробные числа [1].

22. Пропорции в Древней Греции

Слово «пропорция» происходит от латинского proportio, означающего вообще соразмерность, определенное соотношение частей между собой. В древности учение о пропорциях было в большом почете у пифагорейцев. С пропорциями они связывали мысли о порядке и красоте в природе, о созвучных аккордах в музыке и гармонии во вселенной. Некоторые виды пропорций они поэтому называли «музыкальными» и «гармоническими».

В IV в. до н. э. общая теория пропорций для любых величин (соизмеримых и несоизмеримых) была создана трудами древнегреческих ученых, среди которых выдающееся место занимали Теэтет и Евдокс. Эта теория подробно изложена в V книге «Начал» Евклида.

В VII книге «Начал» изложена теория отношений и пропорций для целых чисел (и соизмеримых величин).

Из пропорции

$$a : b = c : d.$$

Евклид [2] выводит следующие производные пропорции:

$$b : a = d : c \qquad (a + b) : b = (c + d) : d$$

$$a : c = b : d \qquad (a - b) : b = (c - d) : d$$

$$a : (a - b) = c : (c - d).$$

В 19-м предложении VII книги Евклид доказывает *основное свойство пропорции:* произведение крайних членов равно произведению средних членов. Пропорциями пользовались для реше-

---

[1] И действительные числа.

[2] Этой современной записи Евклид, конечно, не знал. (См. гл. 1, § 2; 21.)

ния разных задач и в древности и в средние века. Определенные типы задач легко и быстро решаются и теперь при помощи пропорций.

Пропорции и пропорциональность применяются и применялись не только в математике, но и в архитектуре, искусстве. Пропорциональность в архитектуре и искусстве означает соблюдение определенных соотношений между размерами разных частей здания, фигуры, скульптуры или другого произведения. Пропорциональность в таких случаях является условием правильного, наглядного и красивого построения или изображения.

Г. В. Лейбниц.

23. Как записывали пропорции в прошлом

До XVI в. пропорции записывали большей частью словесно, полностью или сокращенно. Были сделаны разные попытки введения специального обозначения для пропорций.

Так, в одной индийской рукописи XII в. пропорция

$$10 : \frac{163}{60} = 4 : \frac{163}{150}$$

записана следующим образом:

10 1	163 60	4 1	163 150

Средневековые математики стран ислама, писавшие на арабском языке справа налево, применяли для записи пропорции троеточие, например:

$$144.\cdot.84.\cdot.12.\cdot.7,$$

вместо нашей записи $7 : 12 = 84 : 144$.

Выдающийся французский математик XVII в. Рене Декарт записывал эту же пропорцию так:

$$7\,|12|84|\,144.$$

Некоторые английские математики поныне пользуются одной старой записью, введенной еще в 1631 г. Оутредом: $a \cdot b :: c \cdot d$.

Современная запись с помощью двоеточия и знака равенства была введена Г. В. Лейбницем в 1693 г.

24. Задачи на пропорциональное деление из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого

Сложное тройное правило в прошлом часто применялось при решении задач на деление завещанного имущества между наследниками.

Решим одну такую задачу из «Арифметики» Магницкого:

Задача **13**. «Некто оставил в наследство жене, дочери и трем сыновьям 48 000 рублей и завещал жене $\frac{1}{8}$ всей суммы, а каждому из сыновей вдвое больше, чем дочери. Сколько досталось каждому из наследников?»

Ответ: 6000; 6000; по 12 000.

А вот как изложено решение этой задачи у Магницкого:

«Зри: $\frac{48\,000}{8}$ } 6 000 жене

—	48 000 первому	2		2	12 000 }
	6 000 второму	2		2	12 000 } сыновьям
			7 — 42 000	2	12 000 }
	42 000 третьему	2			
	дочери	1			
	Всем детям:	7		1	6 000 дочери».

25. Об измерении земного меридиана Эратосфеном

Одна из первых попыток измерения земного меридиана была предпринята задолго до Деламбра и Мешена (гл. 1, § 2; 13) древнегреческим ученым Эратосфеном (III в. до н. э.), автором «решета» для нахождения простых чисел (гл. 3; § 5; 12).

Эратосфен измерил расстояние между двумя египетскими городами, Александрией и Сиеной, лежащими почти на одном меридиане, и нашел его равным 5000 стадий (греческий стадий был равен приблизительно 192 м). Затем он установил, что во время летнего солнцестояния, когда в Сиене Солнце стоит как раз в зените, оно в Александрии отклоняется на $\frac{1}{50}$ всего меридиана. Отсюда он вывел, что длина всего меридиана равна 5000×50, т. е. 250 000 стадий.

Задача **14**. «Узнать, на сколько метров и на сколько процентов ошибся Эратосфен, если принять верной длину меридиана, найденную Деламбром и Мешеном».

26. Фигурные числа

В строительстве сооружений древности — пирамид, дворцов, и храмов — применялись плиты и кирпичи, имеющие грани в виде треугольника, четырехугольника, квадрата и некоторых других фигур. С этими же фигурами человек встречался при меже-

вании и измерении земельных участков. Знакомясь с разными геометрическими фигурами, люди стали подмечать и их общие свойства. Так постепенно начала складываться *геометрия* — наука о фигурах. Геометрия достигла высокого развития в Древней Греции в школе Пифагора (VI—V вв. до н. э.).

Пифагор и его ученики развивали не только геометрию, но и арифметику, причем их учение о числах тесно переплеталось с учением о геометрических фигурах. Пифагорейцы составляли из костяшек или камешков различные фигуры, изображали числа в виде точек, группируемых в геометрические фигуры (рис. 65, 66). Такое представление чисел облегчало пифагорейцам (еще раньше вавилонянам) изучать свойства чисел. Числа, которые возможно представить с помощью геометрических фигур, получили в дальнейшем название *фигурных*. Фигурные числа встречаются не только у пифагорейцев, но и у других греческих ученых: Эратосфена (III—II в. до н. э.), Никомаха (I—II в.), Диофанта (III в.) и др. Фигурными числами занимались также индийские математики.

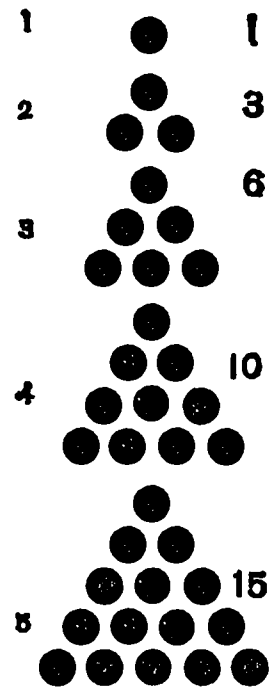


Рис. 65. Фигурные числа—треугольные.

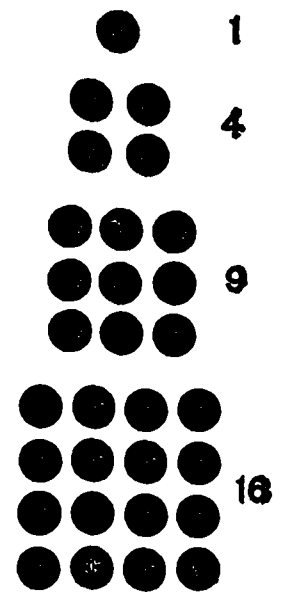


Рис. 66. Фигурные числа — квадратные.

27. Треугольные числа

Простейшими из фигурных чисел являются треугольные числа:

1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; 36; ...

На рисунке 67 эти числа изображены количеством точек на сторонах треугольника. В равностороннем треугольнике ABC, сторона которого равна 1, сумма всех сторон (периметр) равна трем, об этом говорят три точки, размещенные в вершинах треугольника. Удлинив стороны AB и AC в два, три, четыре и т. д. раза и соединив концы сторон, получим новые равносторонние треугольники с периметрами, соответственно равными 6 (шесть точек), 10 (десять точек) и т. д.

Последовательность треугольных чисел можно легко составить следующим образом: из ряда натуральных чисел

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; ...

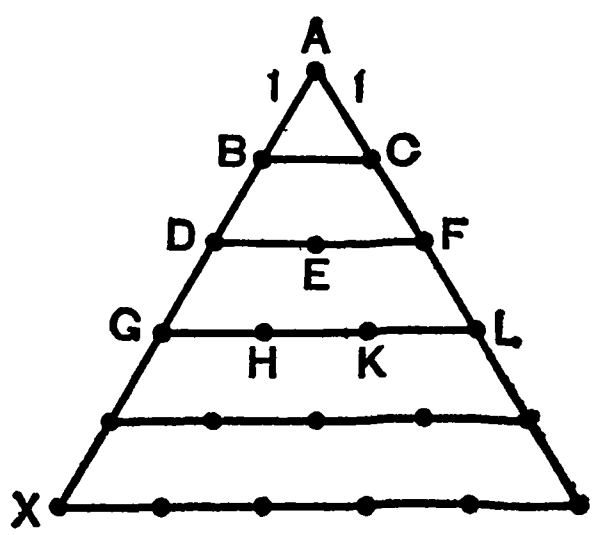


Рис. 67. Треугольные числа.

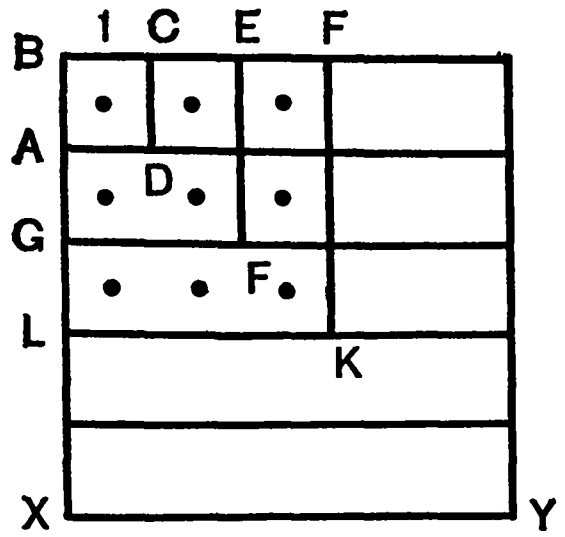


Рис. 68. Квадратные числа.

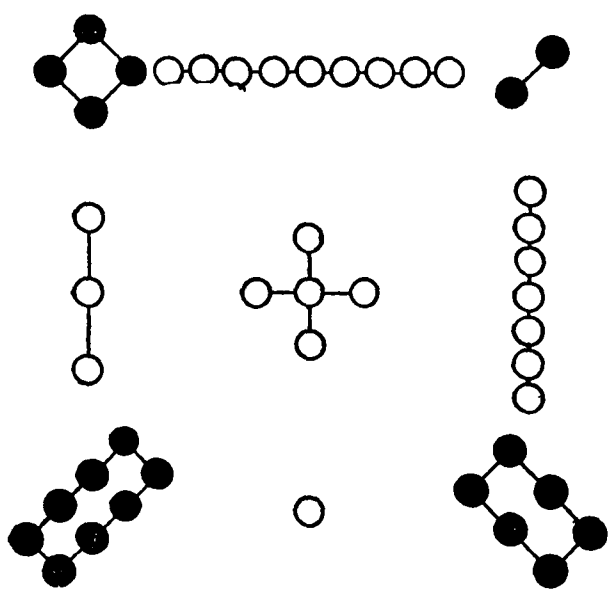


Рис. 69. Девятиклеточный старинный магический квадрат.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 70. Современный вид девятиклеточного магического квадрата.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Рис. 71. Древнеиндийский магический квадрат.

берем первое число 1, затем сумму первых двух (1+2=3), сумму первых трех (1+2+3=6), четырех (1+2+3+ +4=10) чисел и т. д.

Задание ученикам. Написать первые 15 треугольных чисел и начертить соответствующие треугольники .

28. Квадратные числа. Формула Диофанта

Квадратными называются числа ряда: 1; 4; 9; 25; 36; ... т. е. квадраты натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ... Таким образом n-е число в ряду квадратных чисел есть n^2.

На рисунке 68 количество точек изображает число единичных квадратов, содержащихся в разных других квадратах, т. е. соответствующую *площадь*. Выше было указано, что ряд треугольных чисел получается путем последовательного суммирования чисел натурального ряда. Аналогично можно получить ряд квадратных чисел из ряда нечетных чисел: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21... Действительно, 1+ +3=4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16.

Один из видных древнегреческих математиков — Диофант, живший в III в. н. э., нашел формулу, связывающую треугольные числа с квадратными. Если обозначить любое треугольное число буквой T, то $8T+1$ будет некоторым квадратным числом K. Например, умножая треугольное число 6 на 8 и складывая произведение 48 с 1, получаем 49, являющееся квадратным.

Задание ученикам. Задача 15. «Проверить формулу Диофанта на первых 8 треугольных и квадратных числах ($K-1=8T$)».

29. Магические квадраты

В одной из древних рукописей II тысячелетия до н. э. помещена фигура, изображенная на рисунке 69. Это старейший так называемый *магический*

(волшебный) квадрат. Черными точками тут представлены четные числа, называвшиеся в то время «женскими», кружочками — нечетные, «мужские» числа. Вот как выглядит этот квадрат в современной записи (рис. 70). Как видно, в нем первые 9 натуральных чисел так расположены, что сумма чисел по строкам, столбцам и диагоналям одна и та же. Это — основное свойство всякого магического квадрата. В древнем магическом квадрате сумма равна 15. В другом древнеиндийском магическом квадрате (рис. 71) 1 в. н. э. сумма равна 34. Кроме основного, можно заметить и другие свойства этого магического квадрата: сумма угловых чисел (1; 4; 16; 13) тоже равна 34; в каждом столбце имеется два рядом стоящих числа, сумма которых 13 или 21 и т. д.

Пифагор.

В далеком прошлом отсталые суеверные люди считали все эти необычные свойства таинственными. Отсюда произошло название «магические», «волшебные» квадраты[1].

Через посредничество арабов магические квадраты проникли из Индии в Европу. Так как они представляют известный интерес в науке о числе, ими занимались видные ученые. Среди последних был и знаменитый французский математик XVII в. Пьер Ферма.

30. От эмпирической к теоретической арифметике

Опытные данные, полученные людьми в ходе их трудовой деятельности, постепенно обобщались. Найденные на практике связи между числами, отдельные арифметические правила, все накопленные знания постепенно приводились в *систему.* Устанавливались *общие* правила действий над числами, создавалась *теория* арифметики. И если в далеком прошлом арифметика была лишь собранием отдельных правил счета и приемов для решения некоторых практических задач, была *эмпирической,* т. е. опытной, практической, то уже в Древней Греции наряду с практической арифметикой («логистикой») заметно развивается *теоретическая* арифметика. Так, Пифагор и его ученики изучают общие свойства натуральных чисел и классифицируют их на четные и нечетные, простые и составные, совершенные, дружественные и др. (гл. 7, § 3). Евклид доказывает, что имеется

---

[1] Подробнее о магических квадратах см.: Кордемский Б. А. Математическая смекалка, 2-е изд. М., 1955, с. 260—295.

бесчисленное множество простых чисел, Архимед расширяет устную и письменную нумерацию и т. п.

Школьная арифметика является учением о действиях над натуральными и дробными числами. Как *наука* арифметика в настоящее время охватывает учение не только о числах рациональных, но и действительных и мнимых [1]. Учение же о свойствах и законах, справедливых только для целых чисел, составляет отдельную ветвь математики и называется «теорией чисел».

Греческие математики дали первые доказательства некоторых свойств, относящихся к целым числам. В «Началах» Евклида систематически изложены основы теории делимости. Для развития теории чисел большое значение имела «Арифметика» Диофанта и работы индийских ученых. В новое время расцвет теории чисел начался в XVII в. с работ П. Ферма. Величайшие математики XVIII в. Л. Эйлер и Ж. Л. Лагранж значительно продвинули вперед учение о целых числах. Особенно большое значение для развития теории чисел имели работы величайшего немецкого математика К. Ф. Гаусса. Большие заслуги в развитии теории чисел принадлежат русским и советским ученым П. Л. Чебышеву (1821—1894), Е. И. Золотареву (1847—1878), А. А. Маркову (1856—1922), Л. Г. Шнирельману (1905—1938), И. М. Виноградову, А. О. Гельфонду, Б. Н. Делоне и другим.

---

[1] См., например, БСЭ или МСЭ, «Арифметика», «Теория чисел».

Глава 4.
ГЕОМЕТРИЯ

§ 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

31. О происхождении некоторых терминов и понятий

Большая часть употребляемых ныне в школе геометрических терминов (названий) сложилась еще в Древней Греции [1]. Греческие термины были частично еще в древности, затем в средние века переведены на латинский язык, служивший на протяжении многих веков языком ученых. Поэтому многие математические термины происходят от греческого или латинского языков.

Вот несколько примеров:

1. Термин «планиметрия» — средневековый и происходит от латинского planum — плоскость и греческого «метрео» — мерю.

2. «Фигура» — латинское слово, означающее образ, вид, начертание. Этот термин вошел в общее употребление, начиная с XII в. До этого наряду с ним употреблялось для того же понятия и другое латинское слово — «форма», также означающее наружный вид, внешнее очертание предмета.

3. «Линия» — от латинского слова linea (черта, линия), образовавшегося от слова linum — лен, льняная нить, шнур, веревка. Шнуром или веревкой пользовались для измерений римские землемеры.

4. «Перпендикуляр» — от латинского слова perpendicularis — «отвесный». Термин был образован в средние века.

5. «Биссектриса» — от латинских слов bis (дважды, надвое) и sectrix (секущая).

6. «Вертикальные» (углы) — от латинского verticalis — вершинный.

7. «Циркуль» — от латинского circulus — круг.

8. «Центр» — от латинского centrum — транскрипция древнегреческого слова «кентрон», означавшего колющее орудие, которым в древности подгоняли животных в упряжке, а также острие ножки циркуля.

9. «Радиус» — от латинского radius — луч, спица в колесе.

10. «Диаметр» — от греческого «диаметрос» — поперечник, насквозь измеряющий («диа» — между, сквозь).

11. «Хорда» — от греческого «корде» — струна, тетива.

---

[1] Бескин Л. Н. Стереометрия. М., 1960, с. 218—237.

* *
*

Прямой угол — одно из древних геометрических понятий, оно связано с образом вертикального положения человека и многих предметов окружающей среды.

О том, что сумма двух смежных углов равна двум прямым углам $2d$ (d — начальная буква французского слова droit — прямой), было на практике много раз проверено и установлено еще древними вавилонянами и египтянами.

Согласно Евдему Родосскому (IV в. до н. э.), написавшему первую в мире историю математики, равенство вертикальных углов было впервые доказано первым видным древнегреческим философом и математиком *Фалесом Милетским* (VII—VI вв. до н. э.).

Классификация линий на прямые, ломаные и кривые и углов — на *прямые, острые* и *тупые* берет свое начало в глубокой древности. Термины же «сверхтупой», «развернутый» и «полный» угол были введены лишь в XIX в.

32. О симметрии

Слово «симметрия» — греческого происхождения («сим» — с, «метрон» — мера) и буквально означает «соразмерность». В архитектуре и искусстве оно применяется также в смысле гармоничности, равновесия, красоты.

Издавна человека, познававшего в ходе трудовой деятельности явления природы, поражала форма некоторых предметов и существ: очертания листьев на деревьях, расположение лепестков на цветах, виды плодов и бабочек, спирали раковин, строение многогранных кристаллов и т. п. Строение самого человеческого тела тоже симметрично.

Зачатки учения о симметрии относятся к глубокой древности, о чем свидетельствуют разнообразные геометрические орнаменты, сохранившиеся от той эпохи, на каменных и гранитных плитах и сосудах. Многовековые наблюдения человека над симметричными фигурами среди минералов, растений и животных, его долголетний опыт применения симметрии в строительстве и искусстве привели к созданию учения о симметрии. О ней писал в своем трактате «Об архитектуре» римский инженер Витрувий (I в.), ее изучали и применяли архитекторы и художники эпохи Возрождения, в том числе выдающиеся итальянские живописцы Леонардо да Винчи и Рафаэль; ею занимались ученые нового времени — Луи Пастер (1822—1895), Пьер и Жак Кюри и др. В геометрию элементы учения о симметрии ввел французский математик А. М. Лежандр (1752—1833).

В настоящее время учение о симметрии лежит в основе кристаллографии и находит широкое применение в науке, технике и промышленности.

33. О треугольниках

Треугольник — самая простая замкнутая прямолинейная фигура, одна из первых, свойства которой человек узнал еще в глубокой древности, так как эта фигура всегда имела широкое применение в практической жизни. В строительном искусстве испокон веков используется свойство жесткости треугольника для укрепления различных строений и их деталей. Изображения треугольников и задачи на треугольники встречаются в папирусах, в старинных индийских книгах и в других древних документах. В Древней Греции учение о треугольниках развивалось в ионийской школе, основанной в VII в. до н. э. Фалесом, и в школе Пифагора. Уже Фалес доказал, что треугольник определяется одной стороной и двумя прилежащими к ней углами. Учение о треугольниках было затем полностью изложено в первой книге «Начал» Евклида. Среди «определений», которыми начинается эта книга, имеются и следующие: «Из трехсторонних фигур равносторонний треугольник есть фигура, имеющая три равные стороны, равнобедренный же — имеющая только две равные стороны, разносторонний — имеющая три неравные стороны». Понятие о треугольнике исторически развивалось, по-видимому, так: сначала рассматривались лишь правильные, затем равнобедренные и, наконец, разносторонние треугольники.

34. О равнобедренном треугольнике. Фалес Милетский

Равнобедренный треугольник обладает рядом геометрических свойств, которые привлекли к себе внимание еще в древности. В задачах на треугольники, содержащихся в папирусе Ахмеса, на первый план выступают равнобедренный и прямоугольный треугольники. На практике часто применялось свойство медианы равнобедренного треугольника, являющейся одновременно и высотой и биссектрисой. Термин «медиана» происходит от латинского слова mediana — «средняя» (линия). То, что углы при основании равнобедренного треугольника равны, было известно еще древним вавилонянам 4000 лет назад.

Ф а л е с из Милета, главного города Ионии[1], считается родоначальником греческой философии и науки. Как философ, он учил, что явления мира не случайны, мир не хаотичен, а закономерен. Он считал, что вода есть начало всего. Из нее возникло все существующее и в нее в конце концов опять превращается. Историческое значение философской деятельности Фалеса заключается в том, что им был сделан решающий шаг от мифологического мировоззрения к научному материалистическому представлению о мире.

---

[1] На западной части побережья Малой Азии.

Фалес Милетский

Почти все философы Древней Греции тщательно занимались математикой, в частности геометрией. Фалесу Милетскому Прокл приписывает открытие или доказательство теорем о том, что диаметр делит круг пополам, что угол, вписанный в полуокружность, прямой, о равенстве вертикальных углов, о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника и др. Эти положения были частично известны еще вавилонянам и египтянам. Однако в отличие от вавилонской и египетской геометрии, имевшей преимущественно практический и прикладной характер, греческая геометрия характеризуется стремлением установить, что геометрические факты верны не только для отдельных частных случаев, а справедливы в любом случае. При помощи общих доказательств, с постепенным переходом от одной истины к другой, греческие математики создали геометрию как *науку*. Направление строгой логической последовательности в геометрии первыми заложили геометры греческой ионийской школы, основателем которой и был Фалес.

Фалес был знаком и с вавилонской астрономией. Платон, знаменитый греческий философ IV в. до н. э., рассказывает, что Фалес, наблюдая звезды, упал в колодец, а стоявшая рядом женщина посмеялась над ним, сказав: «Хочет знать, что делается на небе, а что у него под ногами, не видит...».

Фалес сделал ряд открытий в области астрономии: установил время равноденствий и солнцестояний, определил продолжительность года, впервые наблюдал Малую Медведицу и т. п. Особенную славу ему принесло предсказание солнечного затмения, происшедшего в 585 г. до н. э. Фалес был не только философом и ученым, но также государственным и общественным деятелем. Вот почему он был причислен к группе «семи мудрецов» древности.

35. Задачи на построение

Простейшие задачи на построение возникли в глубокой древности при выполнении измерений участков земли и при выполнении работ по строительству различных сооружений. К первым из таких задач относятся построение отрезка, равного данному, деление отрезков и углов на две равные части, построение перпендикуляра к данной прямой через данную точку. Решение этих задач было известно еще в догреческий период.

За время с VII до III в. до н. э. греческими учеными был накоплен и обработан обильный материал по геометрии и в част-

ности о задачах на построение. Необходимо подчеркнуть, что древнегреческие ученые считали построение геометрическим только в том случае, если оно было выполнено посредством линейки и циркуля без употребления других приборов. Если же при построении пользовались другими приборами, например чертежным треугольником, линейкой с делениями, то такое решение они не считали геометрическим.

Из дошедших к нам источников известно, что еще Пифагор, живший в VI в. до н. э., открыл способы построения правильных пятиугольника и десятиугольника и некоторые более сложные задачи на построение. В разработке методов решения задач на построение большой вклад сделал Платон (V в. до н. э.) и его ученики. Со времен Платона стали различать следующие четыре этапа в решении задач на построение: 1) анализ, 2) собственно построение, 3) доказательство и 4) исследование.

Указанный в наших учебниках способ деления отрезка пополам изложен в комментарии Прокла (410—485 г.), который приписывает его знаменитому греческому математику Аполлонию (III в. до н. э.).

Большее место рассмотрению задач на построение отведено в знаменитых «Началах» Евклида. Доказывая, что та или иная фигура может существовать, он указывал, как ее можно построить, применяя только линейку и циркуль. В его 13 книгах рассмотрено большое число задач на построение, многие из которых рассматривают в средней школе и в настоящее время.

В первую книгу «Начал» Евклида включено построение треугольников. В его четвертой книге рассматривается, помимо других вопросов, построение правильных четырехугольника, пятиугольника, шестиугольника и пятнадцатиугольника.

Особенно много труда вызвала задача деления угла на три равных части (задача о трисекции угла). Однако все усилия решить эту задачу были тщетны. В настоящее время доказано, что эту задачу решить только циркулем и линейкой нельзя.

Глава 5.
АЛГЕБРА

§ 7. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АЛГЕБРЫ

1. От арифметики к алгебре

Алгебра — один из важнейших разделов математики, который помогает решать сложные задачи, встречающиеся в науке, технике и практической жизни. В арифметике ученики рассматривают только четыре действия: сложение, вычитание, умножение и деление. В курсе алгебры изучаются еще два новых действия: возведение в степень и извлечение корня. Кроме натуральных, дробных чисел и нуля, изучаемых в школьном курсе арифметики, в алгебре рассматриваются отрицательные, иррациональные и другие числа. В арифметике рассматриваются лишь действия над конкретными числами, в алгебре же изучаются действия над любыми числами и общие свойства их. Поэтому в алгебре величины обозначаются буквами, представляющими *числа,* т. е. применяется буквенная символика. Вместе с буквами в алгебре применяются и числа, выраженные цифрами.

С помощью буквенной символики возможно легко и просто выражать законы арифметики. Например, переместительный закон сложения, который словами выражается так: «От перемены мест слагаемых сумма не изменяется», записывается в алгебре:

$$a+b=b+a\,,$$

где a и b — любые числа. Аналогично можно быстро и коротко выразить на языке алгебры переместительный закон умножения:

$$ab=ba$$

и другие.

Не только законы арифметики, но и законы физики и многих других наук выражаются с помощью формул, составленных из букв, чисел, знаков действия и знаков равенства и неравенства. Благодаря математической символике человек, выражая общие законы природы, экономит труд и время.

Алгебра складывалась в недрах арифметики, от которой она долгое время не отделялась. В рамках арифметики древние вавилоняне, египтяне, китайцы и греки применяли отдельные алгебраические символы и способы решения задач. Особое развитие алгебра получила в Древней Индии, а в IX—XV вв. — в

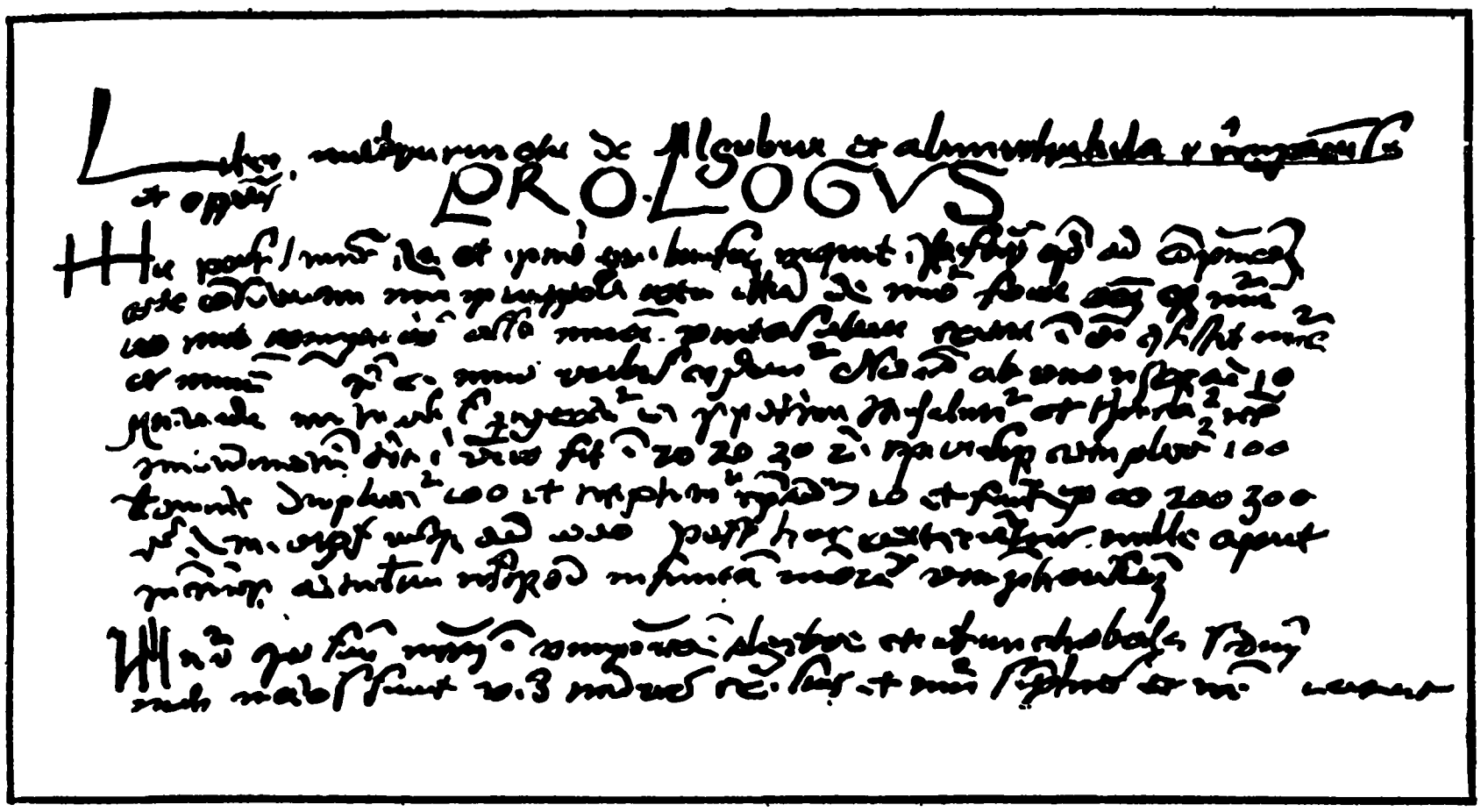


Рис. 72. Первая страница алгебры ал-Хорезми. Из латинской рукописи 1456 г.

странах ислама (гл. 3, § 5, 14), в том числе в Средней Азии. В первой половине IX в. Мухаммед ибн-Муса ал-Хорезми написал на арабском языке книгу, которая в предисловии названа «Краткая книга об исчислении ал-джабра и ва-л-мукабалы» (см. гл. 5, §7; 2). От слова в названии этой книги «ал-джабр», означающего один из алгебраических приемов, произошло наше слово «алгебра». Ал-Хорезми был первым ученым, отделившим алгебру от арифметики и рассматривавшим ее как отдельную ветвь математики.

Алгебру ал-Хорезми в латинском переводе (рис. 72) изучали европейцы на протяжении XII—XVI вв. Дальнейшее развитие алгебры связано с именами европейских ученых Н. Тартальи, Дж. Кардано, Р. Бомбелли, Ф. Виета, Р. Декарта, И. Ньютона, Л. Эйлера, Н. И. Лобачевского и других.

Во многих современных расчетах и вычислениях: в сельском хозяйстве, промышленности и технике нельзя обойтись без помощи алгебры.

2. О происхождении слова «алгебра»

В истории арифметики и алгебры большое значение имеют труды Мухаммеда ал-Хорезми. Написанный им в начале IX в. алгебраический трактат «Китаб ал-джабр ва-л-мукабала» явился первым в мире самостоятельным сочинением по алгебре. Для ал-Хорезми алгебра — это искусство решения уравнений, необходимое людям, как писал он, «в случаях наследования, наследственных пошлин, раздела имущества, торговли и во всех их деловых взаимоотношениях или же в случае измерения зе-

мель, проведения каналов, геометрических вычислений и других предметов различного рода...».

Уравнения ал-Хорезми решает с помощью двух приемов:

а) ал-джабр («восстановление»), т. е. перенесение вычитаемых (отрицательных) членов из одной части уравнения в другую. Дело в том, что в то время отрицательные числа считались абсурдными, фиктивными; перенесение же их с противоположным знаком в другую часть уравнения и превращение их таким образом в положительные числа как бы восстанавливало их, превращало в настоящие числа;

б) ал-мукабала («противоставление») — отбрасывание из обеих частей уравнения одинаковых членов, вроде нашего приведения подобных членов.

Пусть имеется, например, уравнение:

$$7x-11=3x-3.$$

Прием «ал-джабр» даст:

$$7x+3=3x+11.$$

Применяя «ал-мукабала», отнимаем $3x$ и 3 от обеих частей уравнения, после чего получаем:

$$4x=8.$$

Отсюда:

$$x=2.$$

Из заглавия книги ал-Хорезми и взято название «алгебра».

3. «Всеобщая арифметика» И. Ньютона

В развитии алгебры как науки и как учебного предмета большую роль сыграла книга гениального английского физика и математика Исаака Ньютона «Всеобщая арифметика», изданная в 1707 г. Эта книга является продолжением и завершением трудов Виета, Декарта и других ученых в деле перехода от риторической и геометрической алгебры к символической, современной алгебре.

В предисловии к своей книге Ньютон писал: «Вычисления производятся либо при помощи чисел, как в обыкновенной арифметике, либо при помощи букв, как в алгебре. Оба приема основаны на одинаковых принципах и ведут к одной цели, причем арифметика — частным путем, алгебра же — всеобщим». Алгебраическим путем «решаются очень трудные задачи, решение которых было бы тщетно искать при помощи одной арифметики. Однако все действия арифметики столь необходимы в алгебре, что они лишь совместно образуют полную науку вычислений...».

Ньютон решительно порвал с влиянием «геометрической алгебры». В своей книге он изложил алгебру по-новому, дав ей арифметический, современный характер. Основной целью его

книги являлось численное решение задач с помощью составления уравнений, поэтому почти половину «Всеобщей арифметики» составляют задачи. Ньютон оказал огромное влияние на последующее развитие алгебры. После него авторы учебников уже рассматривают алгебру как общую арифметическую дисциплину, математики занимаются изучением и дальнейшим развитием численных методов решения алгебраических уравнений.

Конечно, как учебник «Всеобщая арифметика» в настоящее время устарела. Многие из вопросов, содержащихся в ней, в современных руководствах не рассматриваются, другие же, отсутствующие в ней, включены в наши учебники. Важные изменения внесены и в расположение материала.

Большое историческое значение этой книги состоит в том, что от нее берет начало современная алгебра.

4. И. Ньютон о языке алгебры

В своей «Всеобщей арифметике» Ньютон называет буквы, знаки действий, алгебраические выражения и уравнения *языком алгебры*. Чтобы решить задачу, пишет Ньютон, нужно лишь «перевести ее с обыкновенного языка на язык символических выражений», язык алгебры. Перевод этот означает составление уравнения, решение которого ведет к решению поставленной задачи.

Вот один из примеров, данных Ньютоном:

З а д а ч а **16**. «Купец имел некоторую сумму денег. 100 фунтов из нее он затрачивал каждый год на содержание своей семьи, прибавляя к оставшейся сумме одну ее треть. Через три года он обнаружил, что его состояние удвоилось. Сколько денег было у него вначале?»

Т а б л и ц а 2

На обыкновенном языке	На языке алгебры
Купец имел некоторую сумму денег:	x
В первый год он истратил 100 ф., и у него осталось:	$x - 100$
К остатку он добавил третью его часть, и у него стало:	$(x - 100) + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
В следующем году он вновь истратил 100 ф., и у него осталось:	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
Увеличив остаток на $\frac{1}{3}$, он имел:	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4x - 700}{3} = \frac{16x - 2800}{9}$

Продолжение

На обыкновенном языке	На языке алгебры
В третьем году он снова израсходовал 100 ф., и у него осталось:	$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$
Увеличивая снова остаток на $\frac{1}{3}$, он имел:	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{16x-3700}{9}=\frac{64x-14800}{27}$
Теперь сложившаяся сумма вдвое больше первоначальной:	$\frac{64x-14800}{27}=2x$

Таким образом, заключает Ньютон, задача выражается уравнением:

$$\frac{64x-14\,800}{27}=2x,$$

решив которое вы найдете x.

Задание ученикам. Перевести на язык алгебры и решить задачи из гл. 9, § 14, № 55, 56, 67.

5. Решение уравнений в Древней Греции и Индии

В «геометрической алгебре» древних греков решение уравнений сводилось к построению отрезков, представляющих положительные корни уравнений. Зачатки новой, арифметической алгебры встречаются лишь у Диофанта.

Вот пример задачи из «Арифметики» Диофанта.

З а д а ч а 17. «Если прибавить к 20 и отнять от 100 одно и то же число, то полученная сумма будет в 4 раза больше полученной разности. Найти неизвестное».

В 1881 г. была найдена зарытой в земле близ Бахшали (северо-западная Индия) рукопись неизвестного автора, которая, как полагают, относится к VI—VIII вв. В этом памятнике, написанном на березовой коре и известном в настоящее время под названием «Бахшалийской рукописи», содержится такая задача:

З а д а ч а 18. «Из четырех жертвователей второй дал вдвое больше первого, третий — втрое больше второго, четвертый — вчетверо больше третьего, а все вместе дали 132. Сколько дал первый?»

§ 8. ФУНКЦИИ

6. Понятие функции

В математике идея функции родилась вместе с понятием переменной величины. На первых ступенях своего развития понятие функции, как и понятие переменной величины, было тесно

связано с геометрическими и механическими представлениями. У Декарта (и Ферма) представление о переменной величине появилось в связи с изучением геометрических вопросов, с рассмотрением изменения ординаты в зависимости от изменения абсциссы точки, описывающей определенную линию. У Ньютона наглядное представление о переменной величине родилось в связи с изучением вопросов механики и величин, тесно связанных с течением времени.

Термин «функция» (от латинского functio — исполнение, совершение) ввел впервые Лейбниц в 1694 г. Функциями он назвал абсциссы, ординаты и другие отрезки, связанные с точкой, описывающей некоторую линию. Дальнейшее развитие математического анализа привело уже в первой половине XVIII в. к переходу от наглядной, геометрической или механической, точки зрения на функцию к точному ее «аналитическому», т. е. алгебраическому, определению. В 1718 г. известный швейцарский математик Иоганн Бернулли писал: «Функцией переменной величины называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной и постоянных». Аналогичное определение дал ученик Иоганна Бернулли, академик Леонард Эйлер, который в знаменитом своем произведении «Введение в анализ», изданном в Петербурге в 1748 г., писал: «Функция переменной величины есть *аналитическое выражение,* составленное каким-нибудь способом из этой переменной величины и из чисел либо из постоянных величин».

Таким образом, согласно точке зрения Бернулли и Эйлера каждая функция должна быть выражена аналитически, т. е. некоторой *формулой,* например $y=ax+b$; $y=ax^2+bx+c$; $y=x^3$; $y=\sqrt[3]{x}$; $s=vt$; $v=\sqrt{2as}$ и т. д. Такая точка зрения на функцию сохранилась на протяжении всего XVIII в. Это объясняется тем, что математические формулы были наилучшим и вполне достаточным средством для исследования всех известных в ту эпоху функций.

7.* О методе координат и о графиках

Открытие метода координат сыграло огромную роль в дальнейшем развитии математики, в частности геометрии.

Учащимся известно, с какими трудностями приходится встречаться при доказательстве теорем и при решении задач в геометрии. В большой мере это объясняется отсутствием общих приемов в элементарной геометрии. Иначе обстоит дело в алгебре, где существует один общий способ решения задач путем составления уравнений и нахождения неизвестных по определенному правилу или алгоритму[1]. Выбрав декартову систему координат на плоскости, можно положение любой *точки* плоскости опреде-

[1] О смысле и происхождении слова «алгоритм» см. гл. 3, § 5; 14.

лить с помощью ее координат, т. е. соответствующей *парой чисел*. В дальнейшем учащиеся узнают, что *линиям,* общие свойства которых известны, соответствуют определенные *уравнения.* Так, например, прямая линия выражается алгебраически уравнением первой степени (именно поэтому названным *линейным*). Итак, благодаря системе координат стало возможным переходить от точек к числам, от линий к уравнениям, от геометрии к алгебре и находить, таким образом, общие приемы для решения самых разнообразных геометрических задач.

С другой стороны, с помощью метода координат стало возможным строить *графики* (от греческого «графикос» — чертежный) уравнений, изображать *геометрически* (посредством точек и линий) различные зависимости, выраженные *алгебраически,* т. е. при помощи формул и уравнений. Так, например, графиком прямо пропорциональной зависимости $y=kx$ является прямая линия, проходящая через начало координат; графиком обратно пропорциональной зависимости $xy=a$ является линия, называемая гиперболой.

Графики дают наглядное представление о характере зависимости между величинами, они часто применяются в разных областях науки и техники. В настоящее время изготавливаются специальные аппараты для автоматической регистрации хода того или иного физического явления или технического процесса. Перо такого аппарата вычерчивает на бумаге некоторую линию, являющуюся графиком соответствующей функции (суточного изменения температуры, атмосферного давления, движения поездов и т. п.), аргументом которой обычно является время.

8. Декартова переменная величина — поворотный пункт в развитии математики...

В первой половине XVII в. вместе с введением и распространением буквенной символики в математику проникает идея изменения и движения, идея переменной величины.

Действительно, ведь в алгебре под каждой буквой можно понимать различные значения той или иной величины. Рассмотрим, к примеру, многочлен:

$$M=2xy^2+5x^2y-3x+1.$$

В зависимости от значений, приписываемых переменным величинам x и y, будем иметь бесчисленное количество значений зависимой переменной M. Таким образом, алгебра — это по сути учение об операциях над переменными.

Понятие переменной величины было впервые введено в математику Ренэ Декартом в своем знаменитом произведении «Геометрия», изданном в 1637 г. Это была новая геометрия, изложенная с помощью алгебры. Она называется в настоящее время «аналитической геометрией». Излагая метод координат, Де-

карт рассматривает изменение ординаты y точки, описывающей некоторую линию, в зависимости от изменения абсциссы x той же точки.

Так, следуя Декарту, в уравнении

$$y=ax+b \qquad (1)$$

математики стали рассматривать x и y не просто как неизвестные, а как переменные величины, само же уравнение (1) — как закон изменения y в связи с изменением x, как выражение зависимости между двумя переменными величинами.

Геометрическим образом этой зависимости, т. е. графиком уравнения (1), является прямая линия. Уравнение

$$ax+b=0 \qquad (2)$$

можно рассматривать как частный вид уравнения (1). Ведь мы можем приписывать x любое значение и получать бесчисленное количество соответствующих значений y, одно из которых будет равно нулю (при $x=-\frac{b}{a}$); в этом случае x называется корнем уравнения (2).

Все в природе находится в состоянии непрерывного изменения и развития. В практической деятельности человеку постоянно приходится иметь дело с величинами, изменяющимися в зависимости от времени и других условий, т. е. с переменными величинами. Отсюда и возникла идея переменной величины.

Внедрение понятия переменной величины в математику и физику имело большое значение для развития как этих наук, так и всего естествознания и техники. Продолжая дело Декарта, его предшественников и современников, великие математики XVII в. Ньютон и Лейбниц завершили создание самой важной ветви высшей математики, так называемого «математического анализа», в котором понятия переменной величины и функции имеют первостепенное значение. С введением понятия переменной величины начинается новый, важнейший период в истории развития математики. Вот почему в «Диалектике природы» Фридрих Энгельс писал: «Поворотным пунктом в математике была Декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика...*» [1].

9. Дальнейшее развитие понятия функции

Развитие науки в XIX в. потребовало более широкого взгляда на понятие функции. В основу этого понятия была положена идея о соответствии двух множеств.

Уже в 1817 г. в труде «Чисто аналитическое доказательство» выдающийся чешский математик Б. Больцано определяет функ-

[1] Энгельс Ф. Диалектика природы. М., 1969, с. 224.

Н. И. Лобачевский.

цию как зависимость, заданную любым законом, лишь бы каждому значению одной из переменных соответствовало определенное значение другой. В «Теории функций» (1830 г.) Больцано писал: «Дозволено мыслить закон зависимости одного числа от другого, каким мы хотим».

Новое определение функции встречается у знаменитого русского математика Н. И. Лобачевского в 1834 г. и у немецкого математика Лежен-Дирихле в 1837 г. Лобачевский писал: «Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием...» Лежен-Дирихле так определяет понятие функции: «y есть функция переменной x (на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$), если каждому значению x (на этом отрезке) соответствует совершенно определенное значение y, причем безразлично, каким образом установлено это соответствие — аналитической формулой, графиком, таблицей либо даже просто словами». Это определение функции, в котором упор делается не на аналитическое выражение, а на *соответствие* между множеством значений двух переменных, принято ныне и в школе, а именно: «Соответствие между двумя множествами, при котором каждому элементу первого множества соответствует не более одного элемента второго множества, называется функцией» (См. Учебник по алгебре, 6 кл., 1981 г.).

Очень часто удобным способом задания функции является *аналитический,* т. е. задания функции при помощи *уравнения* или *формулы.* Последняя указывает, какие последовательные действия следует выполнять над значением аргумента (от латинского argumentum — предмет, сюжет, основание), чтобы получить соответствующее значение функции. Аналитическое задание функции находит широкое применение в науке и технике.

Известное значение имеет и старейший *табличный* способ задания функции. Примерами могут служить разные математические и специальные таблицы, применяемые в науке и технике, среди которых таблицы квадратов, кубов и квадратных корней чисел и тригонометрические таблицы, которыми пользовались еще в древности, таблицы процентов, логарифмов и другие.

С помощью системы координат функцию можно задать геометрически, *графическим* способом. График функции чаще всего используется для геометрической интерпретации функции, но иногда и для ее задания. Так, например, задаются функции при

помощи приборов, записывающих изменение температуры, атмосферного давления и других величин в зависимости от времени.

Кроме аналитического, табличного и графического способов, в современной науке довольно часто прибегают и к словесному заданию функций, т. е. к словесной формулировке закона соответствия.

Примеры: 1) Для всех отрицательных значений аргумента x функция y равна —1; для x, равного нулю, функция тоже равна нулю, а для всех положительных значений аргумента функция равна 1. Эта функция известна под названием «Сигнум x» и обозначается так: Sgn x (от латинского Signum — знак). Символ был введен немецким математиком Л. Кронекером (XIX в.); 2) каждому положительному или отрицательному числу x ставится в соответствие значение функции, равное наибольшему целому числу, не превышающему x. Эта функция обозначается через $E(x)$ или $[x]$ и называется «антье от x» (от французского entier — целое).

$$E\left(5\ \frac{2}{7}\right)=5;\ E\left(\frac{3}{4}\right)=0;\ E(8)=8;$$

$$E(\sqrt{10})=3;\ E\left(-\frac{5}{6}\right)=-1 \text{ и т. д.}$$

Итак, на новом этапе развития понятия функции закон функционального соответствия может быть выражен любым способом; важно лишь, чтобы он дал возможность для каждого рассматриваемого значения аргумента определить соответствующее ему значение функции.

О дальнейшем обобщении понятия функции будет идти речь на занятиях кружка в старших классах.

§ 9. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

10. Неопределенные уравнения

Известно, что уравнение с двумя неизвестными выражает зависимость между двумя величинами и является, вообще говоря, неопределенным, т. е. имеет бесчисленное множество решений.

Решением неопределенных уравнений занимались в древности китайцы, греки и индийцы. В «Арифметике» Диофанта приведено много задач, решаемых им с помощью неопределенных уравнений разных степеней, при этом он допускает в качестве решений любые положительные дробные или целые числа[1].

---

[1] Именно поэтому Диофант занимался неопределенными уравнениями не первой степени, а второй, третьей и более высоких степеней.

Вот пример задачи, сводящейся к решению линейного неопределенного уравнения.

Задача **19**. «Найти два (неотрицательных) числа, разность между которыми в 6 раз больше разности их квадратов».

Задача сводится к решению уравнения

$$x-y=6(x^2-y^2). \qquad (1)$$

Ввиду того что x и y различны, то и $x-y\neq 0$. Из (1) следует неопределенное уравнение первой степени

$$x+y=\frac{1}{6}. \qquad (2)$$

Часть решений (2) можно записать в следующей таблице:

Таблица 3

x	0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
y	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	0

Решением неопределенных уравнений в целых числах, называемых *диофантовыми,* много занимались ученые Индии. Они разработали общий метод для решения линейных диофантовых уравнений и для некоторых уравнений второй степени в связи с разными астрономическими задачами. Изучением неопределенных уравнений, теория которых известна в настоящее время под названием «Неопределенный анализ» или «Диофантов анализ», занимались знаменитые математики разных времен, в том числе Ферма, Эйлер, Лагранж, Гаусс, Чебышев, Золотарев и многие другие.

Задания ученикам. Построить график уравнения (2) задачи 19.

11.* Система уравнений первой степени с двумя неизвестными и ее решение в древности

Задачи, решение которых соответствует современным задачам на составление и решение системы уравнений с несколькими неизвестными, встречаются как в вавилонских и египетских текстах II тысячелетия до н. э., так и в трудах древнегреческих, китайских и индийских ученых[1].

В VII—VIII книгах китайского трактата «Математика в девяти книгах» рассматриваются системы уравнений и даются краткие правила их решения, при этом все изложение ведется

[1] Рекомендуется увязать материал с понятием определителя второго порядка, доступным для учащихся.

словесно. Коэффициенты системы уравнений располагались на счетной доске в виде таблицы. При повторных действиях на доске было замечено, что с коэффициентами следует систематически поступать по одному и тому же правилу для нахождения решения системы уравнений.

Вот пример из VII книги вышеназванного трактата, озаглавленной «Избыток — недостаток».

З а д а ч а **20**. «Покупают сообща буйвола. Если каждые семь семей внесут по 190, то недостаток равен (то есть не хватит) 330. Если же каждые 9 семей внесут по 270, то избыток равен (то есть останется) 30. Сколько было семей и сколько стоит буйвол?»

В трактате коротко излагается прием решения задачи, который в современной символике сводится к следующему:

Если имеется система:

$$\begin{cases} a_1 x - y = b_1, \\ a_2 x - y = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

то надо составить из коэффициентов таблицу вида:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

из которой находятся неизвестные величины, взяв:

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}, \quad y = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2 - a_1}. \tag{3}$$

Обозначая через x количество семей, y — стоимость буйвола, составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{190}{7} x - y = -330, \\ 30x - y = 30. \end{cases} \tag{1'}$$

Сравнивая с (1), получим:

$$a_1 = \frac{190}{7}, \quad a_2 = 30, \quad b_1 = -330, \quad b_2 = 30;$$

таблица (2) представится в виде:

$$\begin{Bmatrix} \frac{190}{7} & 30 \\ -330 & 30 \end{Bmatrix},$$

а решение системы согласно (3) будет:

$$x = \frac{30 - (-330)}{30 - \frac{190}{7}} = 126; \quad y = \frac{\frac{30 \cdot 190}{7} + 30 \cdot 330}{3 - \frac{190}{7}} = 3750.$$

Так же решается в VII книге и задача 68 из гл. 9, § 14. Проверьте!

12. Две задачи Ал-Хорезми

Решить следующие задачи ал-Хорезми:

Задача **21**. «Разность двух чисел равна двум, отношение их — числу, обратному двум. Найти числа».

Задача **22**. Найти два числа, зная, что сумма их равна 10, а отношение 4».

13. Из «Греческой антологии»

В X—XIV вв. пользовался большим успехом анонимный сборник, содержащий 48 задач, написанных в стихах, большей частью гекзаметром[1], который получил название «Греческая антология» (от греческих слов «антос» — цветок и «лего» — собираю — так назывались сборники избранных произведений древнегреческой поэзии).

Это одно из первых сочинений по занимательной математике. Вот одна из задач этого сборника:

Задача **23**. «—Хроноса[2] вестник, скажи: какая часть дня миновала?

— Дважды две трети осталось того, что прошло от начала».

Решить задачу способом составления системы двух уравнений с двумя неизвестными, учитывая, что под «днем» древние подразумевали 12 часов.

14. Учение об уравнениях и расширение понятия о числе

Алгебра возникла из решения практических задач с помощью уравнений. Учение об уравнениях является поныне главным содержанием школьного курса алгебры. Но для решения уравнений нужно уметь производить действия над одночленами, многочленами и алгебраическими дробями, уметь производить разложение на множители, раскрывать скобки, приводить дробь к общему знаменателю и т. п. Таким образом, учение об уравнениях невозможно без учения о законах действий. Действия, производимые для решения уравнений, выполняются по существу над числами, так как буквы применяются в элементарной алгебре для обозначения чисел.

При решении уравнений нельзя, вообще говоря, ограничиться множеством одних только целых положительных чисел. Если рассматривать, например, общее уравнение первой степени с одним неизвестным:

$$ax+b=c, \qquad (1)$$

---

[1] Гекзаметр — стихотворный размер в античной поэзии («Илиада» и «Одиссея» Гомера, «Энеида» Виргилия и др.).

[2] «Хронос» — по-гречески «время».

где a, b, c — натуральные числа, то его корень

$$x = \frac{c-b}{a} \qquad (2)$$

уже не всегда будет натуральным числом, он может быть и дробным, если a не является делителем $(c—b)$, может быть отрицательным, если $c<b$.

Итак, для того чтобы можно было решать любое уравнение, даже только первой степени, необходимо иметь, помимо натуральных чисел, еще и дробные и отрицательные числа, т. е. необходимо иметь все рациональные числа.

Таким образом, практика решения уравнений первой степени и потребность сохранения указанного алгоритма породили необходимость расширения понятия числа от множества положительных целых чисел до множества рациональных чисел. Зная это множество, можно решать любое уравнение (и систему уравнений) первой степени. При этом коэффициенты

$$a, b, c$$

могут быть любыми рациональными числами.

Решение уравнений второй степени требует дальнейшего расширения множества чисел, введения новых чисел. Об этом будет речь идти в старших классах.

§ 10. СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

15. Начало буквенной символики. Возведение в степень

У древних вавилонян, египтян и китайцев имелись некоторые отдельные знаки — иероглифы для немногих математических понятий. Однако лишь в «Арифметике» Диофанта (III в.) встречаются зачатки алгебраической буквенной символики (рис. 73). Не любое число обозначал Диофант буквой, а только *неизвестное* и его степени. Неизвестное, названное «аритмос» (число), обозначалось знаком[1], ς — игравшим роль нашего «x». Особые обозначения имели вторая степень неизвестного, названная «динамис», т. е. «сила», третья степень — «кубос», четвертая — «динамо — динамис», пятая — «динамо — кубос», шестая — «кубо — кубос». Диофант обозначал обратные значения неизвестной и ее степени, т. е. $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots \frac{1}{x^6}$ особыми знаками; знак $\mathcal{M}^{\circ}$ обозначал отвлеченную единицу.

[1] Предполагают, что речь идет о греческой букве «сигма».

Рис. 73. Зачатки алгебраической символики у Диофанта.

Знак сложения отсутствовал, слагаемые писались рядом. Знак вычитания — $\wedge$ [1]. Знак равенства — i — первая буква в греческом слове «изос» — *равный*. Кроме указанных символов и сокращений, все остальные действия, условия и ответы выражались у Диофанта *словесно*.

И в Древней Индии не было особого знака для сложения. Знаком вычитания служила *точка над вычитаемым*. При делении делимое ставилось *над делителем*. Сокращенные записи употреблялись для обозначения умножения неизвестного и известных. При наличии многих неизвестных каждому из них приписывалось для отличия название особого *цвета:* «черное», «желтое», «голубое» и т. д.

В деле применения сокращенных записей и символов индийцы значительно превзошли Диофанта.

Подобно Диофанту европейские математики XVI и частично XVII в. вторую степень неизвестного называли «сила» (по-латыни (Census) [2], а также «квадрат» (Quadratus), третью степень — «куб» (Cubus). Виет применял сокращения: N (Numerus, число) для первой степени, Q — для второй, C — для третьей. QQ — для четвертой степени и т. д. Например: $1C - 8Q = 16N$ *aequatur* 40 означает в современной записи: $x^3 - 8x^2 + 16x = 40$.

М. Штифель писал AAA вместо A^3; английский математик начала XVII в. Т. Гарриот писал $aaaa$ вместо a^4. Англичанин Оутред писал в 1631 г. Aq вместо A^2, Ac вместо A^3, Aqq вместо A^4, Aqc вместо A^5 и т. д.

Современная запись, вроде Y^3, Y^4 и т. д. была введена Декартом и систематически применялась им в его «Геометрии». Декартово обозначение степеней, которое применяли в XVII в Валлис, Ньютон и другие, сохранилось и поныне.

16. Развитие понятия степени. Символы и термины

Понятие степени, возникшее свыше 400 лет назад и первоначально означавшее произведение конечного числа равных сомножителей (степень с натуральным показателем), на протяжении веков неоднократно обобщалось и обогащалось по содержанию. Понятия 2-й и 3-й степени числа появились, возможно, в

[1] Возможно, что это сокращение слова «лейпсис» — «требуется».

[2] Прямым переводом греческого слова «динамис» (сила) был термин potentia. Термин census появился, вероятно, как перевод арабского «мал» (имущество).

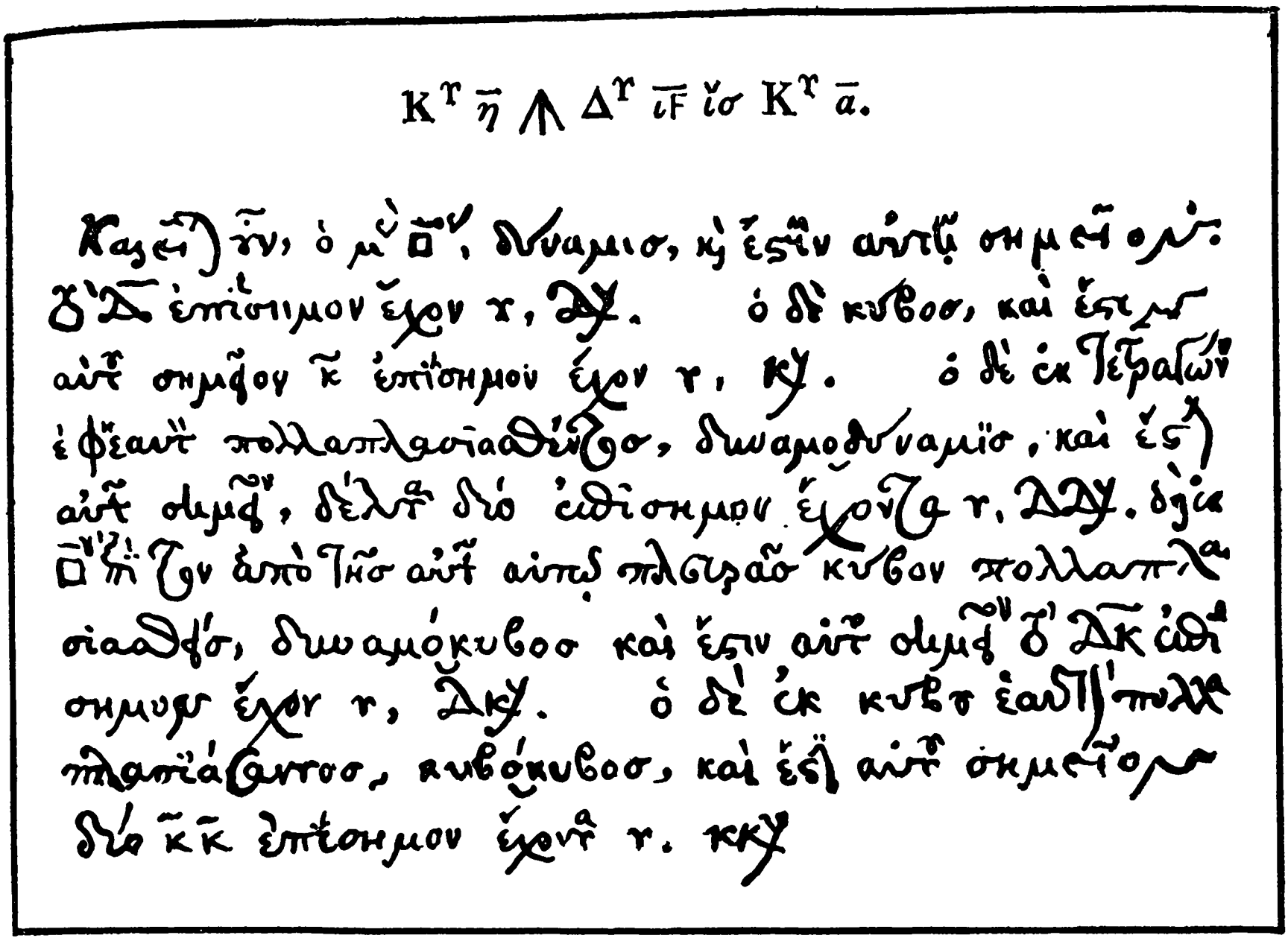


Рис. 74. Из «Арифметики» Диофанта. Рукопись относится к XIV в. Верхняя строка означает в современной записи $8x^3 - 16x^2 = x^3$, точнее $x^3 \cdot 8 - x^2 \cdot 16 = x^3 \cdot 1$.

связи с определением площади квадрата и объема куба. Вавилоняне составляли и пользовались таблицами квадратов и кубов чисел. Названия *квадраты* и *кубы* для 2-й и 3-й степени чисел древнегреческого происхождения. У Диофанта имеются специальные названия для первых шести натуральных степеней неизвестного (рис. 73, 74). Индийские ученые оперировали степенями с натуральными показателями до 9 включительно, называя их с помощью комбинации трех слов: «ва» (2-я степень, от слова «варга» — квадрат), «гха» (3-я степень, от «гхана» — тело, куб) и «гхата» (слово, указывающее на сложение показателей). Применялся мультипликативный принцип как основной: «ва-гха», например, означало 6-ю степень (2·3), «ва-ва-ва» — 8-ю, «ва-гха-гхата» — 5-ю (2+3). Следует отметить, что до XVI в. понятие степени относилось обычно не к числу вообще, а лишь к неизвестным в уравнениях.

Средневековые математики, писавшие на арабском языке, решая уравнения, нередко исходили из квадрата неизвестного (x^2), называя его «мал» (имущество); само неизвестное называлось «жидр» (вообще корень растения, а в данном случае квадратный корень из x^2), иной раз «шай» (вещь). При переводе на латынь в XII в. неизвестное стали называть res (вещь) или radix (корень), квадрат неизвестного — census (имущество), а

позже potentia (*сила*, вероятно, прямой перевод диофантова *динамис*). Термин «степень» и есть перевод слова potentia. С тех пор и сохранился термин *корень уравнения* в смысле «решение уравнения».

17. Дальнейшее развитие символической записи степени

Как известно, итальянские математики пользовались термином cosa (по-итальянски *вещь*) для обозначения неизвестного.

В 1494 г. в Италии появилась одна из первых печатных книг по математике — «Сумма (знаний) по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности» Луки Пачоли[1]. В ней неизвестное обозначается *co (cosa)*, 2-я его степень — *ce (censo)*, 3-я — *cu (cubo)*, 4-я — *ce, ce* и т. п. Эти обозначения были использованы и замечательным итальянским математиком Тарталья, а также проникли в Германию. Под влиянием итальянских математиков находился французский ученый Никола Шюке, живший в XV в. в Лионе, где находилось много эмигрантов из Италии. Шюке внес большой вклад в алгебру, он разработал ряд целесообразных символов для обозначения степени, предвосхитив в известной мере достижения ученых XVII в. Так, например, он писал 12^1, 12^2, 12^3,... вместо современных $12x$, $12x^2$ $12x^3$,..., явно вводя таким образом понятие показателя степени. Однако книга Шюке не была напечатана вовремя и большого влияния не оказала.

В конце XVI в. С. Стевин выражение $3x^3+5x^2-4x+6$ записывал так: $3(3)+5(2)-4(1)+6$.

Ученик Стевина — голландский математик Альберт Жирар в своей книге «Новое изобретение в алгебре» (1629) пишет (2) 17 вместо 17^2. Современная запись x^3, x^4,... была введена Декартом в его «Геометрии» (1637).

Любопытно отметить, что Декарт не пользовался показателем для записи второй степени, т. е. записывал *aa* вместо a^2. Так, впрочем, поступал в XIX в. и величайший немецкий математик Карл Фридрих Гаусс. Мотивом такой записи служил тот факт, что *aa* не занимает больше места, чем a^2. Лейбниц же применял знак a^2, считая, что упор должен быть сделан на унификацию символики.

18.* Обозначение a^{-n}

Отрицательные показатели степеней встречаются еще в сочинении Н. Шюке — «Наука о числах в трех частях» (XV в.). Систематически их стал впервые применять И. Ньютон, который в

---

[1] До нее были напечатаны «Начала» Евклида, «Тревизская арифметика», «Арифметика» П. Борги, «Быстрый и красивый счет» Яна Видмана, «Элементы арифметики» Г. Пейербаха и некоторые другие.

одном из своих писем от 1676 г. писал: «Как алгебраисты вместо aa, aaa и т. д. пишут a^2, a^3 и т. д., так я... вместо $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} и т. д.».

Обозначения с помощью отрицательных показателей широко используются в современной технике и науке с целью сокращения громоздких записей и упрощения действий, когда речь идет о числах, представляющих очень малые величины. Например: 1) толщина пленки капельки масла, расплывшегося по поверхности жидкости, приблизительно равна 0,0000002 мм, т. е. $\frac{2}{10^7}$, или же $2 \cdot 10^{-7}$ мм; 2) диаметр молекулы, принятой за шар, приблизительно равен 0, 00000001 мм, т. е. $\frac{1}{10^8}$ мм, что обозначается через 10^{-8} мм.

§ 11. МНОГОЧЛЕНЫ

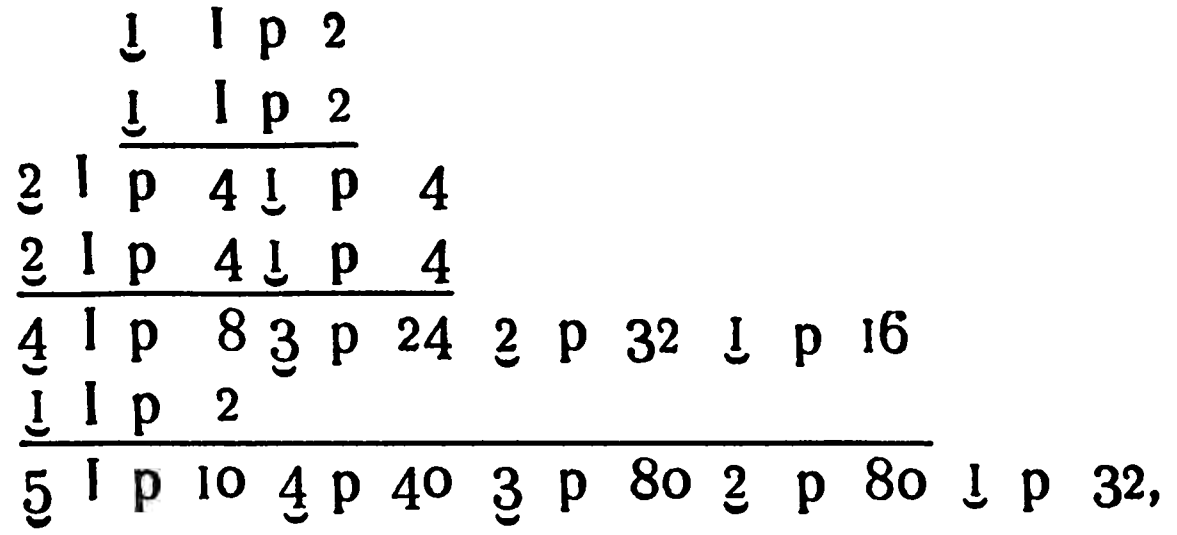
19. От алгебры риторической к алгебре символической

Труды ал-Хорезми (VIII—IX вв.), Абу Камила (IX—X вв.), ал-Караджи (X—XI вв.), ал-Беруни (X—XI вв.), Омар Хайяма (XI—XII вв.), ал-Каши (XIV—XV вв.) и других ученых стран ислама значительно способствовали развитию алгебры, в частности теории уравнений. Однако в этих трудах отсутствовали символы и знаки. Как содержание задачи и название величин, так и все действия, решение и ответ записывались полностью словами. Такой же, *риторической* алгебра оставалась долгое время и в Европе[1]. Еще в XVI в. уравнение, которое ныне записывается в виде $x^3+ax=b$, записывалось так: «Куб p некоторое количество вещей равно числу». Здесь буква p стоит вместо нашего знака +; «некоторое количество» — вместо a; «вещь» — вместо x, «число» — вместо b.

В 1572 г. видный итальянский математик Р. Бомбелли записывал алгебраические выражения так, как показано на рисунке 75. Такие громоздкие записи затрудняли алгебраические действия, тормозили развитие науки. Между тем не только необходимость, но и возможность введения и употребления кратких записей и буквенной символики стали особенно очевидными после изобретения книгопечатания в XV в.

В конце XVI в. Виет, основываясь на частично разработанной до него символике, стал обозначать буквами не только неизвестные, но и коэффициенты при них, ввел общую буквенную символику. Однако записи уравнений Виета содержали еще мно-

[1] Алгебру Диофанта, индийских и западноевропейских математиков до XV—XVI вв., в которой употреблялись отдельные буквы, обозначения и сокращения слов, иногда называют синкопирующей (от греческого «синкопе» — сокращение).



Что означает $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$,

$$(x^2 + 4x + 4)^2 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16.$$

и т. д.

Рис. 75. Математические символы в алгебре 1572 г. итальянского математика Бомбели.

го слов вместо символов. Например, вместо знака равенства он писал слово «равно» и т. п.

Алгебраическая символика совершенствовалась и продолжала развиваться в трудах Рене Декарта, Исаака Ньютона, Леонарда Эйлера и других ученых XVII—XVIII вв.

Алгебраическая символика значительно облегчила изучение математики и способствовала ее полному расцвету.

20. Формулы умножения. Геометрическая алгебра в древности

Найденные древневавилонские клинописные тексты свидетельствуют, что некоторые формулы умножения (квадрат суммы, квадрат разности, произведение суммы на разность) были известны еще около 4000 лет назад. Их знали, кроме вавилонян, и другие народы древности, конечно, не в нашем, символическом виде, а словесно, или — как, например, у древних греков — в геометрической форме.

Ученые Древней Греции представляли величины не числами или буквами, а отрезками прямых, которые обозначали буквами или концы которых отмечали с помощью двух букв. Вместо «произведения ab» говорилось (и рассматривался) «прямоугольник, содержащийся между отрезками a и b», вместо a^2 — «квадрат на отрезке a» и т. д. Эта алгебра, оперировавшая не числами, а отрезками, площадями и объемами фигур, была названа в XIX в. «геометрической алгеброй».

Вторая книга «Начал» Евклида содержит ряд алгебраических тождеств, сформулированных и доказанных геометрически.

Вот, к примеру, как там выражается правило «квадрата суммы»: Если прямая линия (имеется в виду отрезок AB) как-либо рассечена (точкой C), то квадрат на всей прямой (т. е. по-

строенный на AB) равен квадратам на отрезках (т. е. сумме квадратов, построенных на AC и CB) вместе с дважды взятым прямоугольником, заключенным между отрезками.

Доказательство следует из самого чертежа (рис. 76).

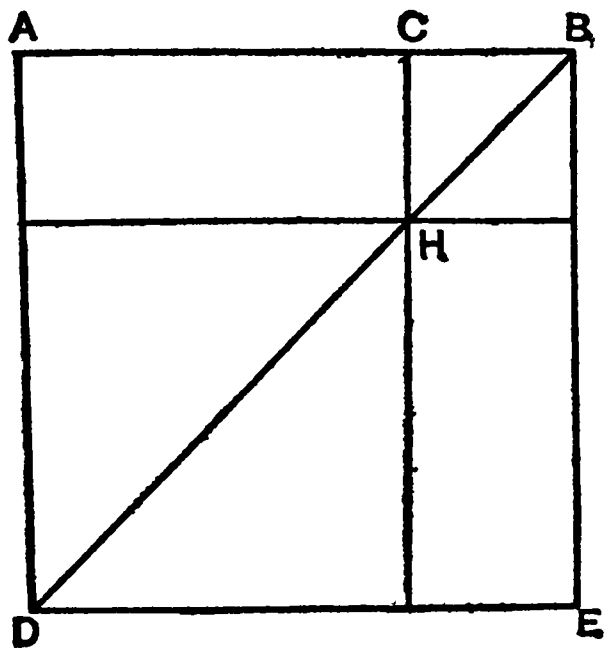


Рис. 76.

Вавилоняне тоже называли произведение ab «прямоугольником», a^2 — «квадратом», но они наряду с этим употребляли и числа и арифметические выражения, в то время как греки старались все переводить на геометрический язык.

О причинах появления геометрической алгебры и о ее значении для развития математики будет идти речь в старших классах. Тут отметим, что в XVI в. геометрическая алгебра со своими громоздкими методами доказательств и длиннейшими словесными формулировками тормозила развитие алгебры. Даже Виет, примкнув к античной геометрической традиции, во многих отношениях ограничил возможности буквенной алгебры. Лишь ученым XVII в., в первую очередь Ньютону, удалось полностью отказаться от геометрической алгебры и перестроить алгебру на новой, современной основе.

21. Из истории скобок

При разложении многочленов на множители и других преобразованиях часто применяются скобки.

Знаки для объединения составных величин выражения и для обозначения порядка выполнения действий появились в XV в. В своем арифметико-алгебраическом сочинении «Наука о числах в трех частях», написанном в 1484 г., французский математик Никола Шюке подчеркивал многочлены горизонтальной чертой. Так же поступал еще в 1550 г. итальянский математик Р. Бомбелли, который, однако, позже положил начало квадратным скобкам, применяя вместо скобок букву L и перевернутую 7.

Круглые скобки появляются в XV в. в трудах Штифеля, Тартальи и других. В конце того же века появляются и фигурные скобки в книгах Виета. Однако в течение почти всего XVII в. употреблялись не скобки, а горизонтальная черта, проводимая над выражением, подлежащим включению в скобки. Так поступают Декарт, Гарриот и другие. Ньютон пользовался даже несколькими надписанными друг над другом чертами; например:

$$\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y+17=0.$$

означало у него $\{[(y-4)y+5]y-12\}y+17=0$.

Широкое применение скобки получили лишь в первой половине XVIII в. благодаря Лейбницу и еще больше Эйлеру. Само название «скобки» произошло от введенного Эйлером немецкого термина Klammer — скобки.

22. Об основных законах действий. Распределительный закон у Евклида

Основные законы действий над числами были известны еще в глубокой древности и принимались как очевидные на основе многовековой человеческой практики. С развитием теоретической арифметики и алгебры появляется и постепенно развивается потребность в доказательстве тех или иных свойств.

В VII книге «Начал» Евклид доказывает переместительный (коммутативный) закон умножения: $ab=ba$. Во II книге он доказывает геометрическим методом распределительный (дистрибутивный) закон умножения:

$$a(b+c+d+...)=ab+ac+ad+...$$

Это свойство формулируется в «Началах» так: если из двух отрезков (a и m) один (m) рассечен на сколько угодно частей (b, c, d), то прямоугольник (am), заключенный между этими отрезками (сделайте чертеж!), равен сумме прямоугольников (ab, ac, ad), заключенных между пересеченным отрезком (a) и каждой из частей (b, c, d) другого отрезка (m).

Доказательство непосредственно следует из чертежа.

Попытка доказательства законов действий была предпринята многими учеными, в том числе Г. Ф. Лейбницем в XVII в., Л. Эйлером, Л. Бертраном и А. М. Лежандром в XVIII в. Строгое обоснование правил и законов арифметических действий было достигнуто лишь во второй половине XIX в. В том же веке были введены термины «коммутативный» (от латинского commutare — менять, перемещать) и «дистрибутивный» (от латинского distributus — разделенный, распределенный), которые встречаются впервые в 1814 г. у француза Сервуа, а также «ассоциативный» — сочетательный (от латинского associare — ассоциировать, сочетать), введенный в 1843 г. английским математиком В. Р. Гамильтоном.

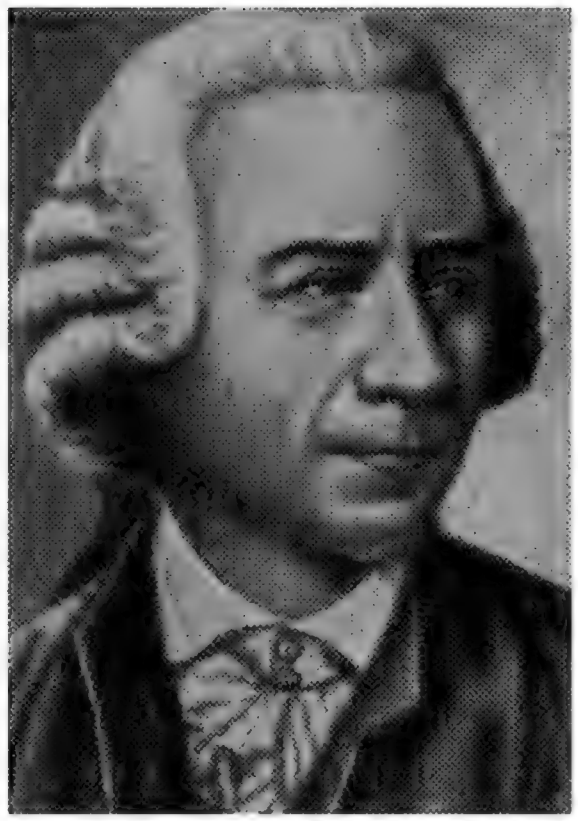
23. Об одной формуле Диофанта

В своей «Арифметике» Диофант применяет формулы умножения для вывода некоторых свойств целых чисел и тождеств.

Задача 24. «Проверить следующее тождество Диофанта:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2».$$

24. О записи и знаках умножения и деления



Л. Эйлер.

Косой крест $\times$ употребляется как знак умножения с 1631 г. В XIV—XVI вв. он применялся как подсобный знак при решении самых разнообразных задач (проверка действий с помощью девятки, решение с помощью метода ложного положения и т. п.). Чтобы не смешивать косой крест с буквой x, которой обозначают обычно неизвестное, Лейбниц в конце XVII в. стал обозначать умножение при помощи точки. Запись умножения без всякого знака между множителями встречается уже у Диофанта при употреблении числового коэффициента, а также в индийской Бахшалийской рукописи.

Запись дробей с помощью горизонтальной черты — древнего происхождения (гл. 3, § 5; 7), ею пользовались Герон и Диофант. Она встречается затем у арабского математика XII в. ал-Хасара, ее применял Леонардо Фибоначчи (XII—XIII вв.), однако в общее употребление дробная черта вошла лишь в XVI—XVII вв. (О знаках деления см. гл. 1, § 2; 19).

Любопытно отметить, что в Бахшалийской рукописи знак деления ставится вслед за делителем. Нечто аналогичное замечается в XVI—XVII вв. при записи деления многочленов: круглая скобка в качестве знака деления ставится вслед за делителем, за которым следует делимое, затем снова скобка и частное.

Вот, например, как записывал Ньютон деление многочлена

$$(a^3+2a^2c-a^2b-3abc+b^2c) \text{ на } (a-b):$$

$$\begin{array}{l}
\qquad\quad +2a^2c \\
a-b)\,a^3-a^2b-3abc+b^2c\,(a^2+2ac-bc \\
\hline
\qquad a^3-a^2b \\
\hline
\qquad 0+2a^2c-3abc \\
\qquad\quad 2a^2c-2abc \\
\hline
\qquad\qquad 0-abc+b^2c \\
\qquad\qquad\quad -abc+b^2c \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0 \quad 0\ .
\end{array}$$

25. «Универсальная арифметика» Л. Эйлера

Первая русская книга по алгебре была написана инженером Н. Е. Муравьевым и напечатана в 1752 г. в типографии Петербургской Академии наук. Однако в учебной алгебраической

литературе XVIII в. первое место занимала «Универсальная арифметика» Леонарда Эйлера, написанная в Петербурге в 1767 г. и там же вышедшая в свет на русском языке в 1768 г., а на немецком — в 1770 г.

Книга Эйлера сыграла большую роль в развитии математического образования не только в России, но и за рубежом. Она была переведена на французский [1], английский и другие языки и переиздавалась около 30 раз в XVIII и в XIX вв. на 6 европейских языках (по-русски — трижды). По образцу «Универсальной арифметики» Эйлера составлялись впоследствии все учебники элементарной алгебры.

В книге Эйлера содержится ряд замечательных тождеств. Вот одно из них:

Задача 25. $(p^2+cq^2)\ (r^2+cs^2) = (pr+cqs^2)+c(ps-qr)^2$.

Проверьте!

---

[1] Французский перевод появился в 1774 г. с приложениями Лагранжа, относящимися к диофантову анализу.

Глава 6.
ГЕОМЕТРИЯ

§ 12. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ

26. О происхождении геометрии

Слово «геометрия» греческого происхождения («ге» — земля, «метрео» — мерю) и означает «землемерие».

О зарождении геометрии в Древнем Египте около 2000 лет до н. э. крупнейший древнегреческий историк Геродот (V в. до н. э.) пишет следующее: «Сезоострис, египетский фараон, разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию и взымал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, на сколько уменьшился участок, и соответствующим образом уменьшить налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию».

Развитие земледелия, строительства, ремесел и торговли требовало умения измерять и вычислять площади, объемы различных фигур и тел, а также знания свойств тех или иных фигур. Решение таких задач содержится в вавилонских клинописных табличках, в египетских папирусах, в древнекитайских трактатах «Чжоу-би»[1] и «Математика в девяти книгах», в индийских религиозно-философских книгах, «ведах» и «сутрах»[2], а также других памятниках древности.

В Древней Греции, начиная с VII в. до н. э., происходит постепенный переход от *практической* к *теоретической* геометрии. Разрозненные геометрические сведения, позаимствованные у египтян и у вавилонян, ученые Древней Греции дополняли, уточняли, обобщали и развивали. Отрывочные, эмпирические факты постепенно претворялись в систему, в цепь связанных между собой понятий, правил и положений, каждое из которых логически вытекало из предыдущего. Таким образом была создана наука, изучающая формы, размеры и взаимное расположение фигур.

---

[1] «Чжоу-би» — шест для измерения солнечной тени. Считают, что трактат относится к XII—XI вв. до н. э.

[2] «Веда» — «знание» на языке санскрита. «Сульва — Сутра» — «Правила веревки». Эти книги относятся, по мнению многих историков, к VII—V вв. до н. э.

Эта наука по-прежнему продолжала называться геометрией, несмотря на то что ее содержание расширилось далеко за пределы учения об измерении земли.

Первое дошедшее до нас полное научное изложение геометрии содержится в труде, названном «Начала» и составленном древнегреческим ученым *Евклидом,* жившим в III в. до н. э. в городе Александрии (ныне Египет).

Эта книга вытеснила все существовавшие ранее руководства по геометрии. В течение двух тысячелетий люди изучали геометрию по «Началам» Евклида. В Древней Греции, Египте, Индии, Италии, Средней Азии и в других странах эта книга сотни и тысячи раз переписывалась от руки, а после изобретения книгопечатания печаталась и сотни раз переиздавалась на языках всех народов, став одной из наиболее распространенных книг в мире. Наши школьные учебники тоже содержат в основном геометрический материал и научную систему, изложенную в труде Евклида. Вот почему геометрию, которую изучают в школе, часто называют евклидовой.

Новый этап в развитии геометрии начался в XIX в. благодаря трудам Н. И. Лобачевского, К. Гаусса, В. Римана, Я. Бояй и других.

27. О признаках равенства треугольников

Понятие равенства в геометрии, введенное Евклидом, несколько отлично от равенства в арифметике или алгебре. Определение «равенства» фигур содержится в первой книге «Начал»: «Совмещающиеся друг с другом равны между собой». Итак, под равенством фигур Евклид, а вслед за ним многие геометры понимали возможность совмещения фигур наложением. Такое понимание термина «равенство» расходится с основным свойством того же понятия в арифметике. Так, вторую аксиому из «Начал» «Если к равным прибавить равные, то получатся равные» нельзя применить к геометрическим фигурам. Например, приложив к прямоугольнику один и тот же треугольник один раз к меньшей стороне, а другой — к большей, мы получим две неравные фигуры.

Чтобы избежать многозначности одного и того же термина в XIX в., в геометрии был принят более общий термин «конгруэнтность фигур». Этот термин происходит от латинского congruentia, что означает совпадение, соответствие, сходство. Если две фигуры конгруэнтны, то существует взаимно-однозначное отображение одной фигуры на другую, причем расстояние между точками фигуры не изменяется при этом отображении. В некоторых отдельных случаях конгруэнтные фигуры могут быть равными.

Признаки конгруэнтности треугольников имели издавна важнейшее значение в геометрии, так как доказательство многочис-

ленных теорем сводится к доказательству конгруэнтности тех или иных треугольников. Доказательством признаков равенства треугольников занимались еще пифагорейцы. По словам Прокла, Евдем Родосский приписывает Фалесу Милетскому доказательство теоремы о «равенстве» двух треугольников, имеющих равными сторону и два прилежащих к ней угла (второй признак равенства треугольников).

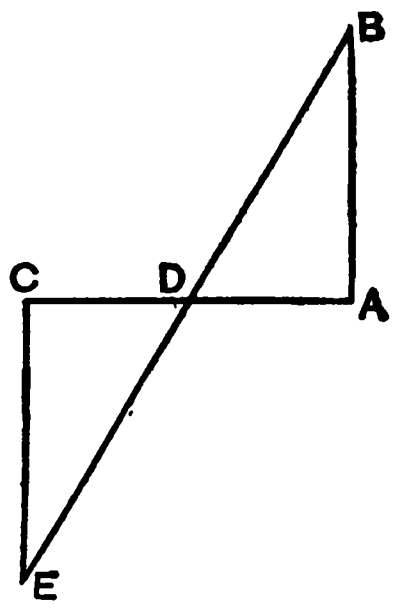


Рис. 77.

Эту теорему Фалес использовал для определения расстояния от берега до морских кораблей. Каким способом пользовался при этом Фалес, точно неизвестно. Предполагают, что его способ состоял в следующем: пусть A — точка берега (рис. 77), B — корабль на море. Для определения расстояния AB восстанавливают на берегу перпендикуляр произвольной длины $AC \perp AB$; в противоположном направлении восстанавливают $CE \perp AC$ так, чтобы точки D (середина AC), B и E находились на одной прямой. Тогда CE будет равна искомому расстоянию AB. Доказательство действительно основывается на втором признаке равенства треугольников ($DC=DA$; $\angle C=\angle A$; $\angle EDC=\angle BDA$ как вертикальные).

28. О прямоугольном треугольнике

В папирусе Ахмеса наряду с равнобедренным часто встречается прямоугольный треугольник. Последний занимает почетное место и в вавилонской геометрии. Землемеры и поныне прибегают к прямоугольному треугольнику для определения расстояний и т. п.

Термин «гипотенуза» происходит от греческого слова «ипотейнуза», означающего «тянущаяся под чем-либо», «стягивающая». Слово берет начало от образа древнеегипетских арф, на которых струны натягивались на концах двух взаимно-перпендикулярных подставок.

Термин «катет» происходит от греческого слова «катетос», которое означало вначале «отвес», «перпендикуляр». В средние века словом «катет» означали высоту прямоугольного треугольника, в то время как другие две его стороны называли гипотенузой, соответственно основанием. В XVII в. название «катет» начинает применяться в современном смысле и широко распространяется начиная с XVIII в.

Евклид употребляет выражения: «стороны, заключающие прямой угол» — для катетов и «сторона, стягивающая прямой угол» — для гипотенузы.

29. Аксиома

В переводе на русский язык αξίωμα означает предложение, достойное уважения, бесспорное (второе значение — почет, уважение, авторитет). Впервые аксиомы были введены древнегреческими учеными. Процесс отбора аксиом, положенных в основу построения геометрии как науки, проходил в продолжение нескольких столетий. Известно, что еще до Евклида ряд геометрических положений доказывали Фалес, Пифагор и др. По-видимому, при обосновании доказательств они явно или в скрытом виде опирались на некоторые положения, принятые ими без доказательств, т. е. на аксиомы.

Первую попытку привести в систему накопленные сведения по геометрии сделал Гиппократ из Хеоса — ученик Пифагора. Им была написана книга «Начала». К сожалению, эта работа до нас не дошла. Вероятно, были попытки упорядочить сведения по геометрии и другими учеными, но до нас не дошедшие.

Самой древней рукописью по геометрии, дошедшей до нас, являются «Начала» Евклида. Надо полагать, что ее длительному сохранению способствовало высокое качество изложения геометрических сведений.

В «Началах» Евклида каждое утверждение обосновывается ссылкой на предшествующие положения, а эти последние в свою очередь вытекают как следствия из более ранних «истин» и т. д. Таким образом, доказательства всех положений построены как на фундаменте на небольшом числе первоначальных утверждений, принятых без доказательств. Эти утверждения, названные автором аксиомами и постулатами, описывали свойства основных понятий — точки, прямой, плоскости.

Некоторое время существовал взгляд, что аксиома — это очевидная, установленная на практике «истина», не требующая доказательств. Этот взгляд далек от научного понимания аксиомы. Аксиомы принимают без доказательств не потому, что они очевидны, а потому, что для их доказательств еще нет никакого исходного материала. Они выступают как основные исходные положения.

В настоящее время в науке считают: аксиома — предложение, которое принимают без доказательств как основное, первоначальное, а все последующие положения (теоремы) доказывают, ссылаясь в конечном счете на небольшое число аксиом, положенных в основу теории.

Ряд строго отобранных аксиом определенной теории принимают за фундамент, на котором строят и развивают эту теорию.

Анализ системы аксиом, предложенных Евклидом, продолжался столетия. Эта работа многих геометров была завершена Д. Гильбертом, который создал полную и непротиворечивую систему аксиом геометрии Евклида. Однако и эту систему аксиом

нельзя считать законченной и совершенной. С развитием геометрии отдельные аксиомы и сама система совершенствуются и изменяются.

30.* О построении прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой. Аксиома параллельности

В первой книге «Начал» Евклид ставит и решает следующую задачу:

Задача **26**. «Пусть дана прямая BC и точка A вне ее (рис. 78); требуется через точку A провести прямую, параллельную прямой BC».

Решение. Возьмем на BC какую-нибудь точку D и, соединив A с D, построим угол DAE, равный углу ADC. Поскольку прямая AD, падающая на BC, EF, образовала накрестлежащие углы EAD, ADC, равные между собой, то EF параллельна BC.

Таким образом доказано, что из внешней точки A можно всегда провести параллельную к прямой BC. Возникает вопрос: является ли эта прямая единственной или существуют еще другие прямые, проходящие через точку A и параллельные данной прямой BC?

На этот вопрос дает ответ следующее предложение (утверждение): через точку, взятую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой.

Это так называемое *основное свойство параллельных прямых*, которое мы, однако, принимаем *без доказательства*.

В геометрии подавляющее большинство изучаемых свойств геометрических фигур устанавливается путем логических рассуждений, ряда умозаключений, так называемых доказательств. Так, методом доказательства было установлено на уроках, что: сумма смежных углов равна $2d$, вертикальные углы равны между собой; если в одном и том же круге центральные углы равны, то и соответственные им дуги равны; признаки равенства (конгруэнтности) треугольников; если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны, то эти две прямые параллельны и т. д.

Такие математические утверждения, которые основываются на доказательствах, называются теоремами. Термин «теорема» — греческого происхождения («теорео» — рассматриваю, обдумываю).

Однако некоторые, немногие свойства геометрических фигур принимаются без доказательств, например: основное свойство прямой линии (через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну).

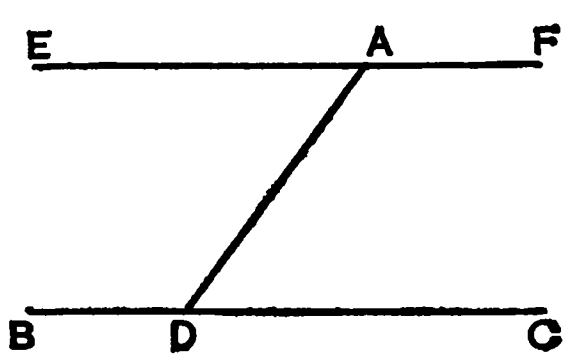


Рис. 78.

Рис. 79. Измерение на местности в XVII в.

Основное свойство параллельных прямых (через точку, взятую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой) тоже принимается без доказательства, т. е. как аксиома. Это так называемая *аксиома параллельности* Евклида, содержащаяся в иной формулировке[1] в первой книге его «Начал». Многие теоремы геометрии доказываются на основе аксиомы параллельности, например: «Если две параллельные прямые пересечены третьей, то соответственные углы равны». Эту, как и многие другие теоремы, без аксиомы Евклида доказать нельзя.

Однако аксиома параллельности Евклида имеет особый характер, она не может быть подтверждена или опровергнута опытом. Поэтому в течение двух тысячелетий после Евклида многие математики пытались доказать это свойство, однако все их усилия оказались безуспешными.

Лишь в 1826 г. великий русский геометр Н. И. Лобачевский, профессор Казанского университета, доказал, что это предложение нельзя логически вывести из других евклидовых аксиом. Положив в основу геометрии иную аксиому, он создал новую научную геометрическую систему, которая была названа *неевклидовой геометрией Лобачевского.*

---

[1] Пятый постулат.

31. Об одном старинном способе определения недоступных расстояний

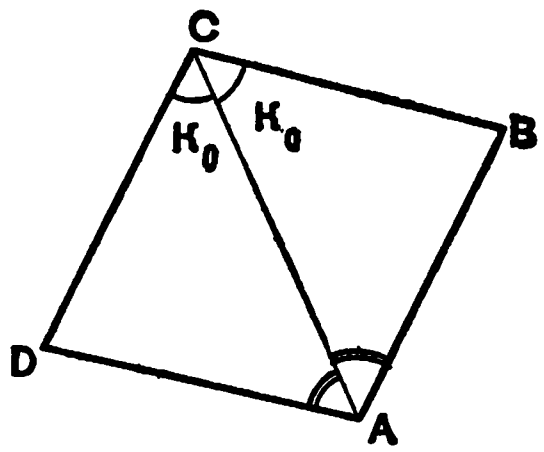


Рис. 80.

При помощи построения треугольников и на основании признаков их «равенства» издавна вырабатывались разные способы определения расстояния между двумя точками, одна из которых недоступна (рис. 79). Один из таких способов изложен и иллюстрирован в учебнике итальянского автора С. Белли — «Книга об измерении», изданном в Венеции в 1569 г. Этот способ состоит в следующем.

Пусть требуется найти расстояние от доступной точки A до недоступной точки B (рис. 80). В точке C, отмеченной вехой, измеряется угол $ACB=k_0$. Затем поворотом около точки C, под тем же углом k_0, наблюдают некоторую доступную точку D. Тогда, если $\angle CAD=\angle CAB$, расстояние AD между двумя доступными точками дает искомое расстояние AB. (В треугольниках ACB и ADC имеем: AC — общая: $\angle ACB=\angle ACD$, $\angle BAC=\angle DAC$.)

Некоторые историки предполагают, что именно этот способ применялся Фалесом Милетским для определения расстояния кораблей от берега.

32. О сумме углов треугольника

Свойство суммы углов треугольника было эмпирически установлено, вероятно, еще в Древнем Египте, однако дошедшие до нас сведения о разных его доказательствах относятся к более позднему времени. Доказательство, изложенное в современных учебниках[1] (рис. 81), содержится в комментарии Прокла к «Началам» Евклида. Прокл утверждает, что согласно Евдему Родосскому это доказательство было открыто еще пифагорейцами (V в. до н. э.). Прокл пишет: «Пифагор впервые разработал принципы геометрии». Пифагорейцы содействовали формированию геометрии как науки, основанной на аксиомах и доказательствах.

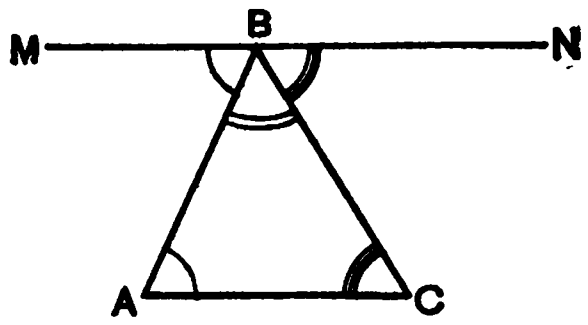


Рис. 81.

В первой книге «Начал» Евклид излагает другое доказательство теоремы о сумме углов треугольника, которое легко

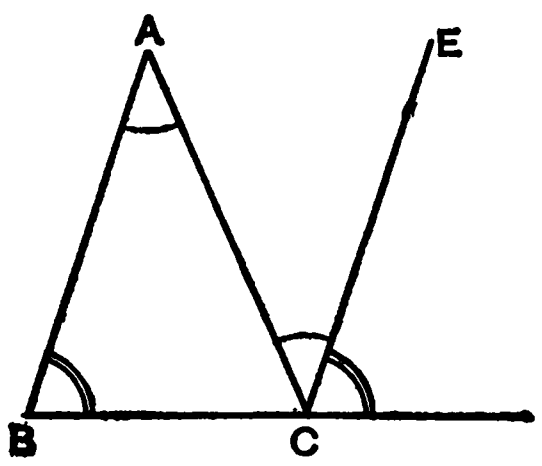


Рис. 82.

[1] См., например, Глейзер Г. Д. Геометрия, учебное пособие для 6—8 классов вечерней школы. М., 1978.

понять при помощи чертежа 82. Великий древнегреческий философ Аристотель (IV в. до н. э.) в своей «Метафизике» упоминает об этом предложении, как известном ему.

Следует отметить, что как доказательство Прокла, так и доказательство Евклида основываются на том, что при пересечении двух параллельных прямых третьей внутренние накрестлежащие, а также и соответственные углы равны. Это предложение в свою очередь доказывается при помощи аксиомы параллельности Евклида. Итак, теорема о том, что сумма углов треугольника равна $2d$, верна, если верна аксиома параллельности Евклида, которая принята в системе аксиом Евклида без доказательства [1].

То же можно сказать и о сумме S углов многоугольника:

$$S=2d(n-2).$$

Между прочим, у Евклида этой теоремы нет. О сумме углов в многоугольнике говорится в комментарии Прокла. Формулу же (1) дал впервые Регномонтан, немецкий математик XV в.

---

[1] В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника меньше $2d$.

II

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА ВНЕКЛАССНЫХ ЗАНЯТИЯХ

**К области математики
относятся только те науки,
в которых рассматривается
либо порядок, либо мера,
и совершенно несущественно,
будут ли это числа, фигуры, звезды,
звуки или что-нибудь другое.**

Р. Декарт

Глава 7.
ИЗ ИСТОРИИ АРИФМЕТИКИ

§ 1. ПАЛЬЦЕВЫЙ СЧЕТ. РАЗЛИЧНЫЕ ПРИЕМЫ УМНОЖЕНИЯ

Счет по пальцам широко применялся в старину. Пальцы и их суставы, а также загибания и разгибания пальцев, складывание и вытягивание рук давали возможность людям не только считать до десятков и сотен тысяч, но и производить некоторые арифметические действия.

Вот, например, как умножали древние римляне на пальцах числа, содержащиеся между 5 и 10.

Пусть требуется умножить 6 на 7. Считаем на пальцах левой руки, согнутой в кулак, до 6, разгибая по одному пальцу, а на правой то же до 7. Два каких-либо разогнутых пальца правой руки кладем на разогнутый палец левой. Всего — 3 разогнутых пальца, это — 3 десятка — 30. Остальные 4 (согнутых пальца левой руки) перемножаются на 3 (согнутых пальца правой), получаем 12.

Итак, $30+12=42$.

Аналогично:

$$6\cdot 8=(1+3)\cdot 10+4\cdot 2=48$$
$$6\cdot 9=(1+4)\cdot 10+4\cdot 1=54$$
$$7\cdot 7=(2+2)\cdot 10+3\cdot 3=49$$
$$7\cdot 8=(2+3)\cdot 10+3\cdot 2=56$$
$$7\cdot 9=(2+4)\cdot 10+3\cdot 1=63$$
$$8\cdot 8=(3+3)\cdot 10+2\cdot 2=64$$
$$8\cdot 9=(3+4)\cdot 10+2\cdot 1=72$$
$$9\cdot 9=(4+4)\cdot 10+1\cdot 1=81$$

Пальцевый счет был широко распространен в практической жизни и в средние века. Ирландский ученый монах Беда Достопочтенный (673—735), написавший книгу «О счете времени»[1], посвятил целую главу счету на пальцах.

Вот как производилось, например, умножение 13 на 14.

---

[1] Одним из мотивов, побуждавших служителей церкви заниматься арифметикой, был интерес к календарю в связи с вычислением дня пасхи («пасхалии») и других религиозных праздников.

Известно:

1) $10 \times 10 = 100$.

Далее:

2) откладывают (загибают) на одной руке 3, на другой — 4 пальца;

3) $3 + 4 = 7$, это — десятки, т. е. $7 \times 10 = 70$.

4) $3 \times 4 = 12$, это единицы.

Итак:

5) $13 \times 14 = 10 \times 10 + 7 \times 10 + 3 \times 4 = 182$.

В связи с пальцевым счетом в средневековой арифметике, начиная с римского автора Боэция (480—524), числа делились на «пальцы» (единицы), «суставы» (десятки) и «составные числа» (все прочие числа). Аналогичные названия встречаются и в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого: «персты», «составы» и «сочинения». Французы поныне называют единицы «пальцами».

Пальцевый счет, который постепенно исчезал после полного утверждения десятичной позиционной системы счисления, сохранился в Европе до XVIII в.

* * *

С давних времен практиковались многочисленные и разнообразные правила умножения и деления.

В одной старинной русской рукописи описывается интересный прием «умножения крестиком», применявшийся еще в древней Индии под названием «молниеносного».

Пусть требуется, например, умножить 48 на 27.

1) Пишем $\times \begin{matrix} 48 \\ 27 \end{matrix}$

2) Говорим: $7 \times 8 = 56$;

3) Пишем: 6, в уме 5 $\times \begin{matrix} 48 \\ \underline{27} \\ 6 \end{matrix}$

4) Говорим: $7 \times 4 = 28$; $28 + 5 = 33$;
33 в уме, $2 \times 8 = 16$;
$16 + 33 = 49$;

5) Пишем 9, в уме 4; $\times \begin{matrix} 48 \\ \underline{27} \\ 96 \end{matrix}$

6) Говорим: $2 \times 4 = 8$; $8 + 4 = 12$;

7) Пишем: 12 и получаем произведение 1296

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times\ 27 \\ \hline 1296. \end{array}$$

Этим способом удобно пользоваться и в настоящее время.

* *
*

В египетских математических папирусах содержатся таблицы разложения дробей на «единичные», правила вычисления площадей и объемов некоторых геометрических фигур, задачи на определение веса обелисков, на нахождение количества дней и строительных материалов, требуемых для воздвижения статуй, и другие практические задачи. Изучая эти папирусы, можно убедиться в том, что в основном арифметические действия сложения и вычитания натуральных чисел у египтян производились как и в настоящее время, умножение же и деление египтяне сводили к последовательному удваиванию и сложению.

Приведем пример: 15×13.

Решение:

/1	15
2	30
/4	60
/8	120

$15 \cdot 13 = (1 + 4 + 8) \cdot 15 = 15 + 60 + 120 = 195.$

Итак, составляем два столбца, во главе первого стоит 1, а второго — множимое 15. Эти числа последовательно удваиваются до тех пор, пока, складывая некоторые числа левого столбца, становится возможным получить множитель 13. Числа правого столбца, которые надо сложить, чтобы получить искомое произведение, соответствуют отмеченным косой чертой числам левого столбца.

Деление сводится к умножению в обратном направлении:

$195 : 15 = (15 + 60 + 120) : 15 = 1 + 4 + 8 = 13.$

К староегипетскому близок так называемый «русский способ умножения», применявшийся крестьянами в дореволюционной деревне. Он основан на последовательной замене произведения двух сомножителей, при котором один из них повторно удваивается, а другой раздваивается до единицы.

Пример: 27×16. Один из сомножителей ставится во главе одного столбца и повторно удваивается, другой — во главе другого столбца — повторно раздваивается,

27	16
54	8
108	4
216	2
432	1.

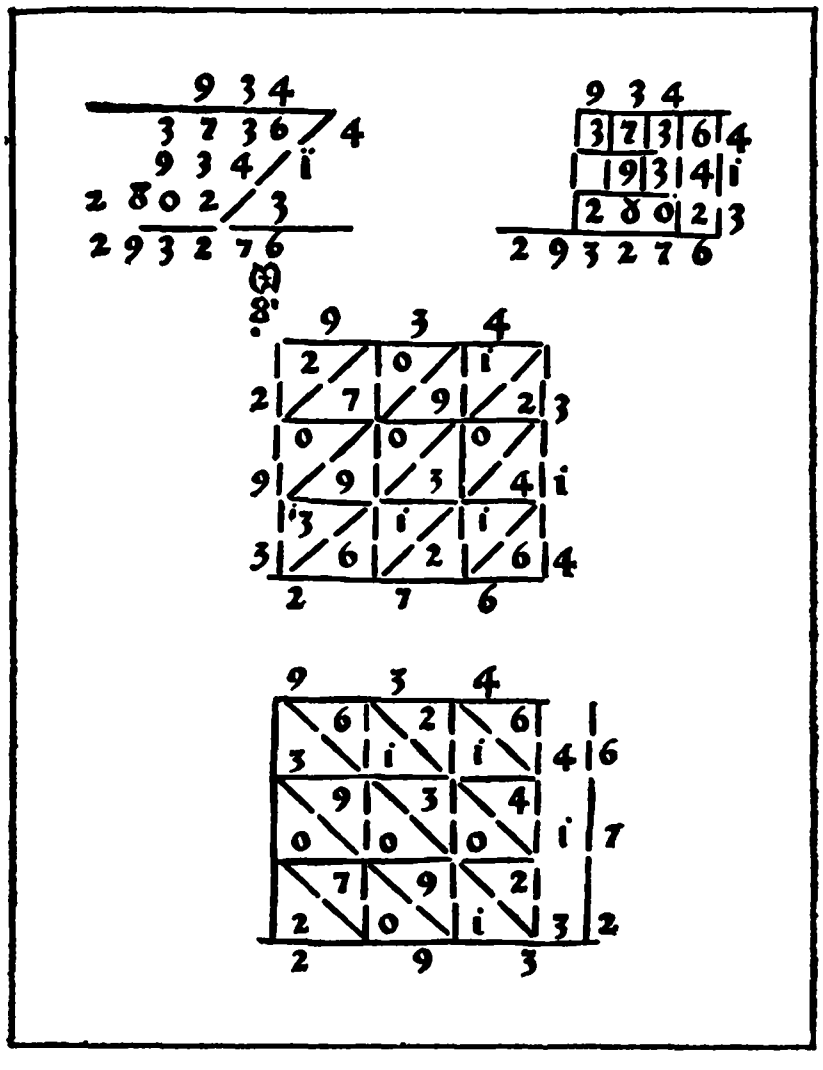


Рис. 83. Способы умножения «решеткой» (см. гл. 7, § 7).

Рис. 84. Умножение чисел 9876 и 6789 в итальянской книге XVI в.

Итак, $27\times16=54\times8=108\times4=216\times2=432\times1=432$.

А вот другой п р и м е р: 46×28.

В этом случае при раздвоении сомножителя 28 получается остаток. В соответствующих местах пишем в скобках 1:

46	28
92	14
184	7(1)
368	3(1)
736	1.

Легко убедиться в том, что в данном случае для получения произведения следует добавить к последнему числу первого столбца те числа того же столбца, которые соответствуют числам с отмеченным остатком второго столбца, то есть:

$$46\times28=736\times1+368\times1+184\times1=1288.$$

Этим приемом иногда выгодно пользоваться в тех случаях, когда один из сомножителей — постоянный.

Пусть требуется, например, решить следующую з а д а ч у:

Поезд дальнего следования делает в среднем 57 км/ч. Какое расстояние он пройдет за 16; 34; 44; 52 часа?

Составим следующую таблицу:

57	16	34	44	52
114	8	17 (1)	22	26
228	4	8	11 (1)	13 (1)
456	2	4	5 (1)	6
912	1	2	2	3 (1)
1824		1	1	1

Отсюда следует:

1) $57 \times 16 = 912$;
2) $57 \times 34 = 1824 + 114 = 1938$;
3) $57 \times 44 = 1824 + 228 + 456 = 2508$;
4) $57 \times 52 = 1824 + 228 + 912 = 2964$.

Для умножения трехзначных чисел применяются указанные, а также и другие приемы. В средние века очень распространенным был способ умножения «решеткой», названный в Италии «Джелозия» (оконные жалюзи). На рисунке 83 показаны виды умножения этим способом чисел 934 на 314; на рисунке 84 показано умножение 9876 на 6789.

§ 2. ПРОВЕРКА ДЕЙСТВИЙ С ПОМОЩЬЮ ДЕВЯТКИ

В старину многие вычислительные приемы и арифметические действия нелегко удавались, так как были очень сложными и громоздкими, требовали много места и времени. Поэтому люди чаще нашего проверяли вычисления. Кроме этого, вычисления производились не на бумаге, а на счетной доске, посыпанной песком или пылью. Каждое промежуточное вычисление «стиралось» песком, чтобы освободить место для следующего вычисления. В самом конце на доске оставались только данные числа и найденный результат. Повторить заново все вычисления с целью проверки было нелегко. Вот почему прибегали к разным приемам проверки. Проверка считалась последним этапом решения задачи.

Одним из старинных способов проверки является так называемый «способ девятки». Изложение этого способа встречается у индийских математиков уже в X в. С ним познакомились затем ученые стран ислама, а еще позже — европейские математики (Леонардо Фибоначчи и др.).

Известно, что при делении любого числа на 9 получается такой же остаток, как и при делении на 9 суммы цифр этого числа. Например, 1738 при делении на 9 дает в остатке 1. Такой же остаток получится от деления на 9 чисел $19 = (1+7+3+8)$; $10 = (1+9)$; $1 = (1+0)$. Однозначное число 1, полученное от последовательного сложения цифр числа 1738, назовем *укороченным числом* [1].

[1] См.: Гончаров В. Л. Арифметические упражнения и функциональная пропедевтика. М. — Л., 1947.

Известно также, что остаток от деления суммы нескольких чисел на какое-то число равен сумме остатков от деления каждого из слагаемых на то же число или остатку от деления суммы на данное число.

Пример 1:

От деления 23 на 7 получается остаток 2
От деления 85 на 7 получается остаток 1
От деления 115 на 7 получается остаток 3
От деления 223 на 7 получается остаток 6.

Пример 2:

От деления 17 на 8 получается остаток 1
От деления 75 на 8 получается остаток 3
От деления 293 на 8 получается остаток 5
От деления 385 на 8 получается остаток 1.

От деления на 8 суммы остатков (9) получается такой же остаток.

Пусть теперь требуется проверить правильность сложения четырехзначных чисел 3731, 4285 и 2054.

Расположим рядом с каждым слагаемым соответствующее ему укороченное число и сложим числа каждого столбца

$$\begin{array}{rr} 3731 & 5 \\ +\,4285 & 1 \\ 2054 & 2 \\ \hline 10070 & 8. \end{array}$$

Если сложение верно, то «укороченная» сумма слагаемых (1+0+0+7+0) должна равняться сумме «укороченных» слагаемых (5+1+2), то есть 8.

Следует отметить, что к сумме цифр всегда можно добавить и из нее можно выбрасывать «девятки», если требуется только найти остаток от деления числа на 9.

Вот еще один пример:

$$\begin{array}{r|l} 8731 & 1 \\ 42503 & 5 \\ 317 & 2 \\ 6956 & 8 \\ \hline 58507 & 7. \end{array}$$

Аналогично проверяется и вычитание.

Пример:

$$\begin{array}{r|l} 647 & 8 \\ -\,213 & 6 \\ \hline 434 & 2. \end{array}$$

Другой пример:

$$\begin{array}{r|l} 4071 & 12 \\ -\,1814 & 5 \\ \hline 2257 & 7. \end{array}$$

В последнем примере уменьшаемое 3 оказалось больше вычитаемого 5, поэтому к 3 добавлена девятка и уменьшаемое стало 12.

В одной из арифметических книг популярного немецкого вычислителя первой половины XVI в. Адама Ризе (1492—1559) приведен следующий пример проверки сложения (рис. 85):

$$\begin{array}{r} 7869 \\ +\ 8796 \\ \hline 16\,665. \end{array}$$

Особенно интересно применение «способа девятки» к проверке умножения.

Пример:

$$\begin{array}{r} 2315 \\ \times\ 467 \\ \hline 16205 \\ 13890 \\ 9260 \\ \hline 1081105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ \times\ 8 \\ \hline 16 \\ \\ \\ \hline 7 \end{array}$$

Приведем один пример проверки умножения из «Арифметики» Магницкого:

$$\begin{array}{r} 365 \\ \times\ 24 \\ \hline 1460 \\ 730 \\ \hline 8760 \end{array}$$

«Сие $\begin{array}{c} 5 \\ \hline 3 \\ \hline 6 \\ \hline 30 \end{array}$ 3 сему согласно, убо добре есть».

Аналогично, хоть и несколько сложнее, применяется этот прием («способ девятки») для проверки деления.

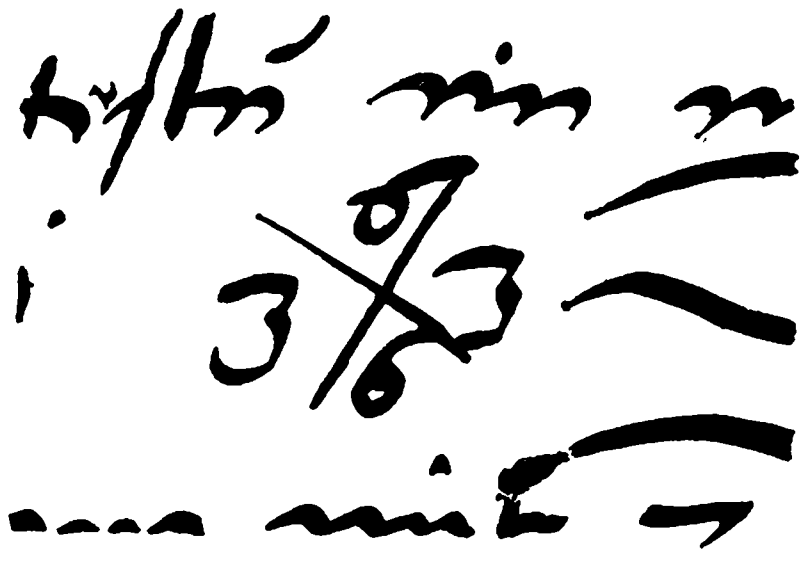


Рис. 85. Проверка девяткой. Из рукописи А. Ризе.

Следует учесть, что проверка девяткой не дает возможности обнаружить ошибки, происходящие от перестановки цифр в числе, так как сумма цифр числа остается в таких случаях неизменной. Нельзя также выявить этим приемом ошибки, которые происходят от замены числа другим с одинаковой суммой цифр. О недостаточности проверки способом девятки писали еще в XV в. Никола Шюке и Лука Пачоли (1445—1514).

Несмотря на указанные недостатки, прием проверки девяткой был и остается очень распространенным и часто употребляется благодаря своей простоте и удобству его применения [1].

§ 3. ПИФАГОР И ЕГО ШКОЛА. О ДРУЖЕСТВЕННЫХ И СОВЕРШЕННЫХ ЧИСЛАХ. ПРОБЛЕМЫ, ОЖИДАЮЩИЕ СВОЕГО РЕШЕНИЯ

Древнегреческому философу и математику Пифагору из Самоса (VI в. до н. э.) и его ученикам приписывается открытие важных свойств целых чисел и пропорций.

Дошедшие до нас биографические сведения о Пифагоре далеко не полны и не достоверны. Он много путешествовал по странам Востока, среди которых были Египет и Вавилон. Древнегреческий писатель — историк и математик Ямблих (III в. н. э.) в своей «Биографии Пифагора» рассказывает, что последний изучал арифметику, музыку, астрономию и другие науки в Вавилоне.

Пифагор был одним из тех ученых, благодаря которым математические знания из Египта и Вавилона передавались в Грецию. По возвращении на родину Пифагор поселился в одной из греческих колоний Южной Италии, где вскоре возникла знаменитая «Пифагорова школа». Эта школа (вернее союз) сыграла значительную роль не только в философско-научной, но и в политической жизни Древней Греции. Своей философией пифагорейцы [2] стремились доказать существование незыблемого, вечного мирового порядка, определенной мировой гармонии и необходимость сохранить вечное господство аристократии. Основу для своих философско-политических и религиозных идей пифагорейцы усматривали в неизменных числовых закономерностях. Они сочетали вместе несочетаемые учения о богах и числах, их арифметика окутана фантастическими и мистическими воззрениями. Но в основном их учение о числе содержит научные факты. Пифагор умер, вероятно, около 500 г. до н. э., школа же его была разгромлена пришедшими к власти рабовладельческими демократами и полностью прекратила свое существование в середине IV в. до н. э.

В школе Пифагора арифметика была тесно связана с музыкой. Согласно одной из легенд Пифагор, проходя вблизи одной кузницы, услыхал звуки различной высоты от ударов различных

---

[1] Первое — не вполне строгое доказательство правила «проверки девяткой» изложил в своей «Книге абака» (1202 г.) итальянский математик Леонардо Фибоначчи. Строгое доказательство этого правила дал в XVII в. английский математик Джон Валлис (1616—1703).

[2] Название «пифагорейцы» — ученики школы Пифагора — впервые применяет Аристотель.

молотков. Исходя из этого и размышляя также о звуках, получаемых от струн разной длины, Пифагор открыл, что если уменьшить длину струны вдвое, тон повысится на октаву, т. е. высота тона обратно пропорциональна длине струны. От трех струн можно получить приятное, гармоническое сочетание звуков, если их длины относятся как 6 : 4 : 3. Отсюда пифагорейцы делали вывод, что от чисел зависит гармония и что числа якобы всегда обусловливают свойства вещей и явлений. Умирая, Пифагор завещал своим ученикам изучать музыку и арифметику.

«Число — это закон и связь мира, сила, царящая над богами и смертными», «сущность вещей есть число, которое вносит во все единство и гармонию», «все есть число» — вот какие положения проповедывали пифагорейцы. В этих односторонних и зачастую лишенных научного основания утверждениях заключался, однако, зародыш новой науки. Из мистического учения Пифагора и его последователей выросла в V—IV и последующих веках до н. э. научная арифметика поздних пифагорейцев. В «Диалектике природы» Фридрих Энгельс писал: «*Пифагор* из Самоса (около 540 г.): *число* — основное начало... Подобно тому, как число подчинено определенным законам, так подчинена им и вселенная; этим впервые высказывается мысль о закономерности вселенной...»[1].

* *

*

Кроме фигурных чисел (гл. 3, § 5; 26—29), пифагорейцами были введены и «дружественные» числа. Так были названы два числа, каждое из которых равно сумме делителей другого числа. Например: 220 и 284. Делители первого из них, не считая самого числа, так называемые «собственные» делители числа 220, то есть числа 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, дают в сумме 284. Аналогично сумма собственных делителей числа 284, то есть чисел 1, 2, 4, 71, 142, равна 220. Пифагорейцы знали только одну пару дружественных чисел. В XVIII в. Леонард Эйлер нашел 65 пар дружественных чисел. Одна из них: 17 296 и 18 416. Однако до сих пор еще не найдена общая формула для получения пар дружественных чисел.

Как было показано выше, число 220 меньше суммы своих (собственных) делителей — такие числа называли в Древней Греции *недостаточными.* Число же 284 больше суммы своих делителей — такие числа называли *избыточными.* Однако есть числа, которые в точности равны сумме своих делителей, например число 6. Его собственные делители — 1, 2, 3. Имеем $6 = 1+2+3$.

---

[1] Энгельс Ф. Диалектика природы. М., 1969, с. 160.

Пифагорейцы считали замечательными все числа, обладающие таким свойством, и называли их «совершенными». Они знали только три таких числа: 6, 28, 496.

$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$
$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$

В «Арифметике» Никомаха из Геразы (I в. н. э.) имеется четвертое совершенное число: 8 128. Никомах писал: «Совершенные числа красивы. Однако красивые вещи редки и малочисленны. Большинство чисел являются избыточными или недостаточными, в то время как совершенных чисел немного. Среди единиц их всего лишь одно, так же среди десятков, сотен и тысяч».

Из сказанного видно, что по мере продвижения от начала в натуральном ряду совершенные числа встречаются все реже и реже. В первых 10 000 имеется всего 4 совершенных числа. Древнегреческие математики уделяли большое внимание вопросу нахождения совершенных чисел. В IX книге «Начал» Евклида доказано, что совершенным является любое число вида $2^k \cdot p$, где число $p = 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots 2^k$ — простое;

k — натуральное число.

Примеры:

$$1 + 2^1 = 3; \quad 2^1 \cdot 3 = 6, \quad \text{или} \quad 2^1 (2^2 - 1) = 6;$$

$$1 + 2 + 2^2 = 7; \quad 2^2 \cdot 7^3 = 28, \quad \text{или} \quad 2^2 (2^3 - 1) = 28. \qquad (1)$$

Аналогично

$$2^4 (2^5 - 1) = 496;$$

$$2^6 (2^7 - 1) = 8128.$$

Никомах заметил, что эти 4 числа оканчиваются попеременно (поочередно) то цифрой 6, то 8, и ошибочно считал, что это имеет место для всех совершенных чисел. Между тем установлено, что четные совершенные числа действительно оканчиваются цифрами 6 или 8, но не попеременно. Например, 5-е и 6-е совершенные числа оба оканчиваются цифрой 6, 7-е и 8-е — цифрой 8.

Еще Евклид нашел, что четные совершенные числа (C) можно вычислить на основании формулы $C = 2^{p-1} (2^p - 1)$, где $2^p - 1$ и p числа простые. Л. Эйлер доказал, что эта формула исчерпывает все множество четных совершенных чисел.

Но при каких значениях p число $2^p - 1$ простое?

Эта задача до сих пор остается нерешенной.

Пятое совершенное число $2^{12} (2^{13} - 1) = 33\,550\,336$ было найдено немецким математиком Регионтаном (XV в.), который, между прочим, среди первых применял в своих трудах знаки + и —. В XVI в. немецкий ученый Шейбель нашел еще два совершенных числа: 8 589 869 056 и 137 438 691 328 ($p = 17; 19$).

Числами вида $2^p - 1$ много занимался французский математик М. Мерсенн (1588—1648), известный также своими переводами

трудов древнегреческих математиков. В его честь эти числа были названы числами «Мерсенна». В 1644 г. Мерсенн нашел восьмое совершенное число ($p=31$). Это число, т. е. $2^{30}(2^{31}-1)$, выражается квинтиллионами. Лишь около 250 лет спустя замечательный русский математик-самоучка Иван Михайлович Первушин (1827—1900) доказал, что число $2^{61}-1$ тоже простое, и таким образом было найдено девятое совершенное число. В 1911—1914 гг. были найдены еще 3 совершенных числа (для $p=89$; 107; 127). Никакие другие совершенные числа, кроме вышеуказанных двенадцати, не были известны до середины нашего века. Начиная с 1952 г. большие простые числа вида 2^p-1 находятся учеными с помощью электронных счетных машин. Так стали известны еще 6 совершенных чисел (для $p=521$; 607; 1 279; 2 203; 2 281 и 3 217). 18-е совершенное число $2^{3216}(2^{3217}-1)$ имеет 1 937 цифр. Для 19-го и 20-го совершенных чисел p соответственно равно 4 253 и 4 423 (открыто в 1962 г.). В период с 1962 по 1965 г. найдено еще три совершенных числа (21-е, 22-е и 23-е). Последнее двадцать третье совершенное число имеет значение $C_{23}=2^{11\,212}(2^{11\,213}-1)$.

Несмотря на большие успехи, достигнутые в исследовании этого вопроса великими учеными всех времен от Евклида до Ферма, Эйлера и др., проблема в целом остается нерешенной. В частности, неизвестно, существуют ли нечетные совершенные числа.

* *

*

К задачам многовековой давности относится и проблема «чисел-близнецов».

Два простых числа называются б л и з н е ц а м и, если их разность равна 2.

П р и м е р ы: 3 и 5, 5 и 7, 41 и 43, 101 и 103.

Числа-близнецы можно находить способом, аналогичным «решету Эратосфена». В 1952 г. В. А. Голубев, учитель математики из г. Кувшиново (Калининской области), имеющий немало заслуг в решении трудных задач теории чисел, вывел формулу для функции $\Pi_2(x)$ — числа пар близнецов от 1 до x.

В 1959 г. была опубликована таблица, составленная с помощью вычислительной электронной машины, содержащая более 8000 пар близнецов в пределах до 1 100 000.

Ныне известна даже такая пара больших чисел-близнецов, второе из которых равно 1 000 000 009 651. Однако до сих пор неизвестно, существует ли бесконечное множество пар близнецов.

Эта, как и многие другие задачи теории целых чисел, еще ждут своего решения ...[1]

---

[1] См.: Б у х ш т а б А. А. Теория чисел. М., 1960, с. 34—35, а также исторические комментарии к другим главам.

§ 4. ИЗ ИСТОРИИ МЕР. СОЗДАНИЕ МЕЖДУНАРОДНОЙ СИСТЕМЫ МЕР

Древними русскими мерами длины, употреблявшимися уже в XI—XII вв., были: пядь, локоть, сажень, верста (или поприще). Названия первых трех связаны с частями человеческого тела. *Малая пядь* равнялась расстоянию между концами растянутых пальцев, большого и указательного (~19 см), *большая пядь* — расстояние между раздвинутыми большим пальцем и мизинцем (~23 см). Мера «локоть», появившаяся еще в древности (см. гл. 1, § 2; 13), равнялась примерно двум большим пядям. Сажень — расстояние от ступни до конца среднего пальца вытянутой руки. Это слово раньше писалось «сяжень», вероятно, в смысле досягаемой человеческой рукой высоты.

Как и в других средневековых феодальных государствах, в России меры длины изменялись в зависимости от местности и времени. Лишь в XVII в., с укреплением русской государственности, была установлена единая система мер. Окончательно же русские дореволюционные меры длины были уточнены в XVIII в. указом Петра I, приравнявшим сажень 7 английским футам.

Миля	=	7 верстам	≈7,469 км
Верста	=	500 саженям	≈1,0668 км
Сажень	=	3 аршинам	=7 футам ≈2,1336 м
Аршин	=	16 вершкам	≈0,7112 м
Фут	=	12 дюймам	≈30,48 см
Дюйм	=	10 линиям	≈2,54 см
Линия	=	10 точкам	≈2,54 мм.

Для измерения площадей применялись квадратные сажень, аршин, фут, дюйм, вершок. Основной земельной мерой, начиная с XVI в., служила десятина[1], равная 2400 кв. сажен ≈1,1 га. Как предполагают, название происходит от того, что первоначально десятина представляла квадрат, сторона которого равна 1/10 версты.

С древних времен люди измеряли объем жидких тел (масло, мед, вино, молоко) и сыпучих тел (зерно, мука и т. п.) особыми сосудами. В Киевской Руси мерой зерна была кадь (или оков), вмещавшая 14 пудов ржи и делившаяся на 2 половины, 4 четверти, 8 осьмин. В XVII в. основной мерой становится четверть,

---

[1] Соха, упоминающаяся в XIII в. и широко применявшаяся в XV—XVII вв., была единицей поземельного обложения, поэтому ее размеры колебались в зависимости от качества земель и социального положения землевладельца. В Древней Руси употреблялась также земельная мера плуг, равная, как предполагают, 8—9 га.

вмещавшая около 6 пудов ржи. В первой половине XIX в. была установлена следующая система сыпучих мер:

Четверть = 8 четверикам	≈ 2,0991	гектолитра
Четверик = 8 гарнцам	≈ 26,239	литра
Гарнец = 200,15 куб. дюймам	≈ 3,228	литра.

Тогда же была установлена система мер жидкости:

1 бочка	= 40	ведрам	≈ 491,96	литра
1 ведро	= 10	штофам	≈ 12,299	литра
1 штоф	= 2	бутылкам	≈ 1,2299	литра
1 бутыль	= 5	соткам (чаркам)	≈ 0,615	литра
1 сотка (чарка)	= 2	шкаликам	≈ 0,123	литра.

Система русских мер веса [1], общепринятая с XVIII в., была следующая:

Ласт	= 72	пудам [2]	≈ 1,179 т
Берковец	= 10	пудам	≈ 1,638 ц
Пуд	= 40	фунтам	≈ 16,38 кг
Фунт	= 32	лотам	≈ 409,512 г
Лот	= 3	золотникам	≈ 12,797 г
Золотник	= 96	долям	≈ 4,266 г.

В древности мера веса часто совпадала с мерой стоимости товара, то есть с денежной единицей. Это объясняется тем, что деньги выражались в весе серебра или золота. У вавилонян денежная единица «шекель» (слово, означавшее «весомое») была и единицей веса. У римлян асс служил единицей веса и денег. Следы такого совмещения единиц остались поныне во Франции, где слово livre означает как 25-копеечную монету, так и полукилограммовый вес. Таково и происхождение английской денежной единицы «фунт» стерлингов.

И в Древней Руси основная весовая единица «гривна» служила одновременно и денежной единицей. Гривна — слиток серебра, вес которого был приблизительно равен позднейшему фунту, содержащему 96 золотников. Во второй половине XIII в. гривну стали рубить пополам и новый слиток в половину денежной гривны, названный рублем, стал в XV в. основной денежной единицей. Происхождение слова «гривна» точно не установлено. Слово «деньга», встречающееся в летописи XIV в., происходит от индийского названия монеты «танка» (у греков — «денака», у татар — «тенга»). В XV в. рубль равнялся 200 «деньгам», «алтын» (по-татарски «шесть») — 6 деньгам.

---

[1] См. сноску на с. 38.

[2] Происхождение терминов «пуд» и «фунт» не установлено. Возможно, что как и английский pound и немецкий pfund все эти термины имеют своим корнем латинское pondus — вес, тяжесть.

Согласно летописи, от маленьких монет, выпущенных в XVI в. с рисунком всадника с копьем, происходит ее название копейка [1].

При Петре I появились гривенники (10-копеечные монеты) и полтинники (50-копеечные монеты). Копейка равнялась с XIX в. двум «денежкам».

* *
*

В настоящее время многими странами мира принята в качестве обязательной метрическая система мер. Слово «метр», как название единицы длины, впервые встречается у ученого Т. Бураттини (1615—1682) в его книге «Универсальная мера», напечатанной в 1675 г. в Вильнюсе. В первой половине XVII в. польский профессор С. Пудловский сделал предложение принять в качестве единицы длины длину секундного маятника. Во второй половине XVIII в. французский астроном Мутон предложил в качестве естественной единицы длины взять длину дуги 1 минуты земного меридиана.

Лишь в 1791 г. комиссия Парижской Академии наук, в состав которой вошли знаменитые математики П. С. Лаплас (1749—1827), Ж. Л. Лагранж (1736—1813), Г. Монж (1746—1818) и другие, предложила принять за единицу длины и назвать «метром» одну сорокамиллионную долю земного меридиана. Предложение было утверждено Национальным Собранием Франции и 7 апреля 1795 г. метр был определен как 0,0000001 четверти парижского географического меридиана.

На основе измерительных работ ученых Деламбра и Мешена, длившихся на протяжении шести лет, был изготовлен платиновый эталон, получивший после некоторого уточнения название «архивного метра».

Создание и распространение метрической системы мер не обошлось без борьбы и трудностей, вызванных сопротивлением феодалов (см. гл. 1, § 2, 13).

Нелегко было преодолеть и вековые привычки к старым мерам. Вот почему несмотря на то, что метр был объявлен законной мерой еще в 1799 г., во Франции до 1840 г. пользовались и старыми мерами.

Так как из-за погрешностей, неизбежно допускаемых при измерениях больших расстояний, как выяснилось еще в XIX в., нельзя установить точно определенную часть земного меридиана, Международная Парижская конференция 1870—1872 гг. решила отказаться от естественной единицы и приняла за метр длину архивного метра. Эталон последнего, под названием «международного метра», изготовленный из стойкого сплава платины (90%) и иридия (10%), был сдан на хранение в Международное

---

[1] Однако этим термином пользовались еще в XV в., когда речь шла о татарской монете «копека».

Рис. 86. Всесоюзный институт метрологии им. Д. И. Менделеева в Ленинграде.

бюро мер и весов в Париже. Одна из 34 копий международного эталона метра, изготовленных в 1889 г. для стран — участниц международного соглашения, хранится в нашей стране, в Ленинграде.

Проверка эталонов — копий разных стран, произведенная в Париже в 30-х годах XX в., показала заметные отклонения длин разных эталонов по сравнению с международным эталоном. Это обстоятельство заставило искать более устойчивую природную величину в качестве единицы длины. Еще в середине XIX в. английский физик Максвелл указал, что следовало бы выразить длину метра через длину волны некоторого светового луча.

В этом направлении еще в 90-х годах прошлого века начал работать американский физик А. Майкельсон.

Эта работа была продолжена в XX в. несколькими учеными других стран.

В настоящее время бурное развитие атомной физики, радиоэлектроники и ракетной техники вызывает необходимость повышения точности и стабильности эталонов длины, веса и др. В октябре 1960 г. состоялась в Париже XI генеральная конференция по мерам и весам, которая приняла новые важные решения в деле создания единой современной системы мер, охватывающей все области науки и техники (СИ).

Рост требований к точности линейных измерений и необходимость создания воспроизводимого эталона привели к сравнению существующего образца, хранящегося в Международной палате мер и весов, с длиной волны оранжевой линии спектра изотопа криптона с атомной массой 86 при строго определенных условиях.

XI конференция утвердила следующее определение метра. Метр — длина, равная 1 650 763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p^{10}$ и $2d^5$ атома $^{86}Kr^n$ при строго соблюдаемых и оговоренных условиях. Благодаря новому определению достигается примерно стократное повышение точности метра и вновь придается ему характер естественности.

Новые усовершенствования и создание единой международной системы мер в различных областях измерения являются итогом долголетней работы многих научных учреждений различных стран, среди которых видное место занимает Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии имени Д. И. Менделеева (рис. 86).

* * *

Метрическая система мер введена в большинстве стран мира, однако не всюду. В частности, в Великобритании и США господствует старая английская система мер:

1 англ. миля	= 1760 ярдам	≈	1,609 км
1 ярд	= 3 футам	≈	0,9144 м
1 фут	= 12 дюймам	≈	30,479 см
1 дюйм	= 12 линиям	≈	2,54 см.

Квадратные ярды, футы и дюймы служат для измерения площадей. Акр (~0,5 га) служит земельной мерой. Кубическими футами и дюймами измеряются объемы.

Меры жидких тел в указанных странах следующие:

Квартер	= 8 бушелям	≈	290,8 л
Бушель	= 8 галлонам	≈	36,35 л
Галлон	= 4 квартам	≈	4,55 л
Кварта	= 2 пинтам	≈	1,14 л
Пинта		≈	0,57 л.

Основная мера веса — английский фунт ≈ 453,6 г. Английская унция = 1/16 фунта ≈ 28,35 г.

Эта система мер, сохраняемая в США, Великобритании и некоторых других, экономически зависимых от них странах, является крайне сложной и не примыкает ни к одной системе счисления. В ней существуют, например, свыше 50 различных «бушелей», две различных «тонны», равные то 2000, то 2940 «фунтам», и т. п. Перевод английских мер в метрические меры и обратно — ненужная потеря средств и времени. В указанных странах все шире развертывается движение за введение современной метрической системы мер.

§ 5. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ. УСТНАЯ И ПИСЬМЕННАЯ НУМЕРАЦИЯ

В далеком прошлом у древних египтян и других народов существовала двоичная система счисления. Об этом свидетельствует, например, то, что египтяне сводили умножение к удвоению (см. гл. 7, § 1), и другие факты.

В настоящее время двоичная нумерация широко применяется в науке и технике.

В двоичной системе имеется всего два числовых знака, две цифры: 1 и 0.

Сохраняя позиционный принцип и в этой системе, цифра 1, стоящая на первом месте (справа), означает одну единицу, на втором месте — $2^1=2$, на третьем — $2^2=4$, на четвертом — $2^3=8$ и т. д., как показано в следующей таблице:

Таблица 4

Двоичная система	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
Десятичная система	1	2	4	8	16	32	64

Пусть требуется написать, например, число три в двоичной системе счисления. Его следует представить как два плюс один и записать так: 11. Обратим еще несколько чисел десятичной системы в двоичную:

Таблица 5

Десятичная система	5	6	7	9	10	12	17
Двоичная система	101	110	111	1 001	1 010	1 100	10 001

Вообще, чтобы выразить данное в десятичной системе число, например 97 (для указания системы записывается $[97]_{10}$), в двоичной системе счисления следует выполнить деления:

$97 : 2 = 48$ (остаток 1)
$48 : 2 = 24$ (остаток 0)
$24 : 2 = 12$ (остаток 0)
$12 : 2 = 6$ (остаток 0)
$6 : 2 = 3$ (остаток 0)
$3 : 2 = 1$ (остаток 1)
$1 : 2 = 0$ (остаток 1)

97	2					
1	48	2				
	0	24	2			
		0	12	2		
			0	6	2	
				0	3	2
					1	1	2
						1	0

Итак:

$$[97]_{10}=[1\cdot 2^6+1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1]=[1100001]_2.$$

Таким образом, для получения искомого числа мы последовательно запысываем в строку справа налево все полученные при делении остатки.

Обратный переход можно осуществить таким же способом, а еще проще посредством умножений и сложений чисел в десятичной системе. Например:

$$[101101]_2=[1\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1]_{10}=$$
$$=[32+8+4+1]_{10}=[45]_{10}.$$

Переход от двоичной системы к другой недесятичной системе можно выполнить в два приема, используя десятичную систему, или непосредственно. В двоичной системе арифметические действия очень просты.

Вот несколько примеров:

Десятичная система.

1)
$$\begin{array}{r} 12 \\ +\ 25 \\ \hline 37 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 11 \\ \hline 12 \\ +\ 12 \\ \hline 132 \end{array}$$

Двоичная система:

1)
$$\begin{array}{r} 1100 \\ +\ 11001 \\ \hline 100101 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 1100 \\ \times\ 1011 \\ \hline 1100 \\ 1100 \\ 1100 \\ \hline 10000100. \end{array}$$

Из сказанного понятно, в чем состоит основное преимущество двоичной системы: вычисления в ней производятся легко[1]. При сложении десятичных чисел следует помнить, что 4 плюс 7 равно 11; 5 плюс 8 равно 13 и т. д. Аналогично, много правил следует помнить при умножении десятичных чисел. Между тем при сложении двоичных чисел достаточно запомнить (кроме $1+0=1$) одно только правило: $1+1=10$. Таблица умножения в двоичной арифметике тоже состоит (кроме $1\times0=0$) из одного действия: $1\times1=1$.

Недостатком двоичной системы является громоздкая запись чисел. Поэтому ею неудобно пользоваться в обиходной жизни. Но при построении современных быстросчитающих электронных машин используется двоичная система, в которой все вычисления производятся при помощи только двух цифр — 1 и 0 (см. гл. 7, § 7).

В машинной математике все большее значение приобретает и другая система счисления — восьмеричная. В этой системе число «двадцать четыре», например, записывается так: 30.

Действительно,

$$[24]_{10}=3\cdot8^1+0=[30]_8.$$

---

[1] В новое время преимущества двоичной системы счисления впервые оценил Г. Лейбниц.

Аналогично,

$$[623]_{10}=1\cdot 8^3+1\cdot 8^2+5\cdot 8^1+7\cdot 8^0=[1157]_8.$$

При этом для перехода использовано вышеуказанное правило последовательного деления, а именно:

623	8		
7	77	8	
	5	9	8
		1	1	8
			1	0.

Между восьмеричной и двоичной системами существует простая связь [1]. Пусть задано, например, число $[110101011]_2$. Разобьем его справа налево на группы по три цифры (последняя группа может состоять и из одной, двух цифр): 110 101 011.

В восьмеричной системе эти группы представляются следующими цифрами: 6 5 3. Отсюда $[110101011]_2=[653]_8$. Обратно, для превращения, например, в двоичную систему числа $[263]_8$, имеем: $[2]_8=[10]_2$; $[6]_8=[110]_2$; $[3]_8=[011]_2$.

Итак, $[263]_8=[10110011]_2$.

* * *

Шестидесятеричная, первая в мире позиционная система счисления древних вавилонян [2], долгое время, вплоть до XVII в., использовалась в науке, следы ее сохраняются поныне (см. гл. 1, §1; 10). О происхождении шестидесятеричной нумерации вавилонян имеется несколько гипотез. Самая распространенная из них была изложена в 1927 г. немецким ученым О. Нейгебауэром и сводится к следующему.

В III тысячелетии до н. э. в долине рек Тигра и Евфрата произошло объединение культур двух народов Древнего Вавилона вследствие победы *аккадийцев* над старожилами *шумерами*. Каждый из этих народов имел свою, десятичную, систему мер, весов и денег. У одного из них денежно-весовой единицей был «шекель», у другого — большая единица, «мина». С укреплением объединенного государства и ростом его тенденции к цен-

---

[1] Простота связи объясняется тем, что 8 является целой степенью 2 ($8=2^3$).

[2] В вавилонских хозяйственных клинописных табличках встречаются также две иепозиционные системы счисления: десятерично-шестеричная и десятеричная. В математических табличках применяется в основном шестидесятеричная позиционная нумерация.

трализации было совершено слияние обеих систем. При этом части $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \cdots\right)$ мины выражались как десятикратные шекеля, например, половина мины приравнивалась 3×10 шекелей, $\frac{1}{3}$ мины $— 2 \times 10$ шекелей и т. д. Было установлено, таким образом, соотношение 1 : 60 между шекелем и миной, что приблизительно соответствовало отношению их весов. Система мер весов и денег со временем распространилась и на другие величины, при этом название мер уже опускалось. И мы ведь нередко говорим: «два двадцать» вместо «два рубля двадцать копеек». Так возникла позиционная система. 60 рассматривалось как «большая единица». Обе «единицы» — 60 и 1 — обозначались одним и тем же знаком ▼ .

Другая позиционная система счисления, отличительной особенностью которой было наличие нуля, возникла около 2000 лет назад у племени *майя,* жившего на полуострове Юкатан в Центральной Америке и обладавшего высокоразвитой культурой. Эта культура была почти полностью уничтожена в XVI—XVII вв. испанскими колонизаторами-поработителями. В системе счисления майя основанием служило число 20. Числа записывались столбцом, снизу вверх. Единица обозначалась точкой, пять — горизонтальной чертой. Знак для нуля напоминал по своей форме раковину. Первые 19 натуральных чисел записывались, комбинируя точку с чертой (рис. 46), 20 — с помощью нуля над точкой (подобно тому, как мы записываем основание десятичной системы, ставя нуль правее единицы) и т. п.

До настоящего времени сохранились остатки двенадцатеричной системы счисления.

Счет группами в 12 был в древности очень распространенным. Вспомним, например, унции и двенадцатеричные дроби римлян (см. гл. 1, § 1; 8). В Африке существуют народы, которые до сих пор ведут счет дюжинами. До недавнего времени мы сами считали; а порою и поныне считаем некоторые предметы дюжинами (платки, носки, рубахи, ложки, вилки и т. п.). День у нас делится на 12 часов, сутки на (12×2) часов, год — на 12 месяцев. Существовали особые названия и для высших разрядов двенадцатеричной системы: 12^1 — дюжина; 12^2 — гросс (то есть большая дюжина); 12^3 — масса.

Письменная двенадцатеричная нумерация требует по сравнению с десятичной введения двух добавочных числовых знаков, цифр (для 10 и 11). Тем не менее двенадцатеричная система счисления имеет и некоторые преимущества над десятичной системой. Обозначим, например, новые две цифры буквами a, b и составим небольшую таблицу перехода от двенадцатеричной к десятеричной системе счисления:

Таблица 6

Система	Числа												
Двенадцатеричная	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*a*	*b*	10	11
Десятеричная	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Двенадцатеричная	12	13	14	15	16	17	18	19	1*a*	1*b*	20	21	29
Десятеричная	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	33
Двенадцатеричная	2*a*	2*b*	30	40	4*a*	50	5*b*	9*a*	*ab*	*ba*	100	9*ab*	
Десятеричная	34	35	36	48	58	60	71	118	131	142	1728	17 003	

Уже из этой и последующей таблицы умножения (7) видно, что запись чисел в десятичной системе счисления куда более громоздкая, нежели в двенадцатеричной. Но двенадцатеричная система имеет и другое значительное преимущество над десятичной: у числа 12 имеется четыре делителя (2, 3, 4, 6), в то время как у числа 10 — только два (2, 5). Это важно потому, что в практике повседневных расчетов часто встречаются дроби: *половина, треть, четверть,* и было бы удобно, если бы основанием системы счисления было число 12, кратное 2, 3, 4. В связи с этим один из ученых выразился так[1]: «Расти на руках у каждого человека еще по одному пальцу, цивилизованные народы приняли бы за основание счета не десяток, а дюжину... Можно пожалеть, разумеется только в интересах арифметики, что на руке у человека нет шестого пальца...»

О преимуществах двенадцатеричной нумерации писали выдающийся французский естествоиспытатель Ж. Бюффон (XVIII в.), философ О. Конт (XIX в.) и др. Любопытно отметить, что один американский автор издал недавно двенадцатеричную арифметику. Некоторые зарубежные ученые, особенно в Америке и Франции, пропагандируют и в наши дни идею всеобщего перехода к двенадцатеричной системе счисления. Существуют даже организации, которые ратуют за введение двенадцатеричной системы[2].

Однако такой искусственный переход и отказ от десятичной системы, созданной усилиями сотен поколений, потребовал бы изменения всей системы мер, всех аппаратов и инструментов измерения, применяемых в современной технике на многочисленных предприятиях; человеку пришлось бы «забыть» все свои десятичные «привычки» счисления и заниматься выучиванием

---

[1] Кэджори Ф. История элементарной математики, пер. с английского/Под ред. с примечаниями и прибавлениями И. Ю. Тимченко, 2-е изд. Одесса, 1917, с. 2.

[2] Например, «Американское двенадцатеричное общество». См. также статью о книге француза Ж. Эссига «Дюжина — наша десятка в будущем» в журнале «Природа», 1955, № 8.

новых таблиц сложения и вычитания, что привело бы к частым ошибкам в течение длительного переходного периода. Все эти трудности практического и психологического порядка говорят о том, что укоренившаяся десятичная система счисления будет и впредь господствовать в жизни людей[1].

Таблица 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	*a*	*b*	10
2	4	6	8	*a*	10	12	14	16	18	1*a*	20
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29	30
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38	40
5	*a*	13	18	21	26	2*b*	34	39	42	47	50
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56	60
7	12	19	24	2*b*	36	41	48	53	5*a*	65	70
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74	80
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83	90
a	18	26	34	42	50	5*a*	68	76	84	92	*a*0
b	1*a*	29	38	47	56	65	74	83	92	*a*1	*b*0
10	20	30	40	50	60	70	80	90	*a*0	*b*0	100

У различных народов в разные времена были разнообразные цифры и письменные системы счисления. Чтобы убедиться в этом, достаточно ознакомиться с системой цифр древних вавилонян (рис. 25—26), египтян (рис. 5; 6; 21; 22; 24), финикийцев (рис. 47), китайцев (рис. 4; 46), славян (рис. 8; 33; 32), майя (рис. 46) и др.

У одного и того же народа письменная нумерация изменялась, совершенствовалась в зависимости от степени общего культурно-экономического развития. Так, например, *иероглифические* цифры древних египтян сменились *иератическими* тогда, когда дальнейшее развитие хозяйства и культуры потребовало скорописного письма. За иератическими последовали еще более простые *демотические* (народные) цифры, как это видно из рисунков 24; 47. На рис. 46 показаны три вида китайских цифр, на рисунке 28 — два вида греческих цифр.

[1] В науке и технике все большее значение приобретают системы с основаниями 2, 8, 16 и др., в связи с машинной математикой.

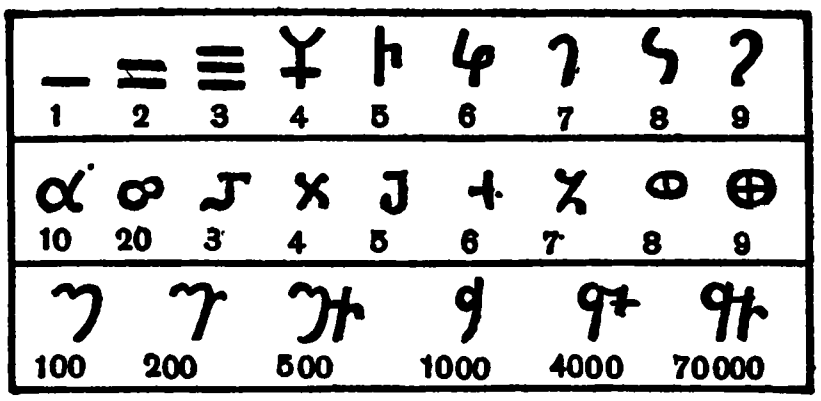


Рис. 87. Цифры «брахми».

В XII в. на территории Мексики существовало государство ацтеков. Этот народ пользовался иероглифическим письмом и двадцатеричной непозиционной нумерацией (рис. 46). В XI — XIII вв. на территории нынешнего Перу жили инки, у которых был развит веревочно-узловой счет (рис. 2, 3), узелковое письмо, называемое «квипу», с помощью которого они производили расчет налогов и т. п. Испанские колонизаторы поступили с ацтеками и инками так же, как с народом майя.

До появления в Индии позиционной нумерации там сменялись системы цифр. С IV в. до н. э. на протяжении 6—7 веков были в ходу так называемые цифры «кхарошти» (рис. 46), нумерация была десятичной непозиционной. Эта система сменилась затем более совершенной системой цифр «брахми» (рис. 87). Почти для всех индийских систем цифр характерно применение специальных знаков для чисел от 1 до 9, что стало одной из предпосылок позиционной десятичной нумерации. Постепенное изменение цифр брахми, вероятно, привело к цифрам «деванагари» (рис. 88), относящимся к IX в. Эволюция индийских цифр от XII до XVI в. показана на рисунке 10.

Относительно происхождения современных наших цифр нет единого мнения среди ученых.

В VIII в. арабы пользовались, вероятно, ионийской нумерацией, с которой ознакомились после завоевания Египта и Сирии. В начале IX в. арабы применяли собственную алфавитную арабскую систему. В первой половине IX в. начинается распространение позиционной записи с восточноарабскими цифрами, представлявшими некоторое видоизменение цифр брахми. Одновременно на западе арабских владений, на Пиренейском полуострове, появляются западноарабские цифры, так называемые цифры «губар» (по-арабски означает пыль, песок). Пользование ими связано с применением абака (см. гл. 7, § 7). Между восточноарабскими и западноарабскими цифрами имеются и сходства и существенные различия (рис. 88). Проникновение индийско-арабских цифр через Испанию в Европу началось, вероятно, в X в. в виде апексов (см. гл. 7; § 7), очень близких к цифрам «губар». Одни историки считают, что все без исключения виды цифр, изображенных на рисунке 88 — индийского происхождения, другие же считают, что именно цифры «губар» и, следовательно, наши цифры берут свое начало не в Индии, а возможно в Египте или Иране, откуда попали в Испанию в связи с торговлей, широко развитой между разными странами ислама. К цифрам «губар» позднее прибавился нуль. Древней-

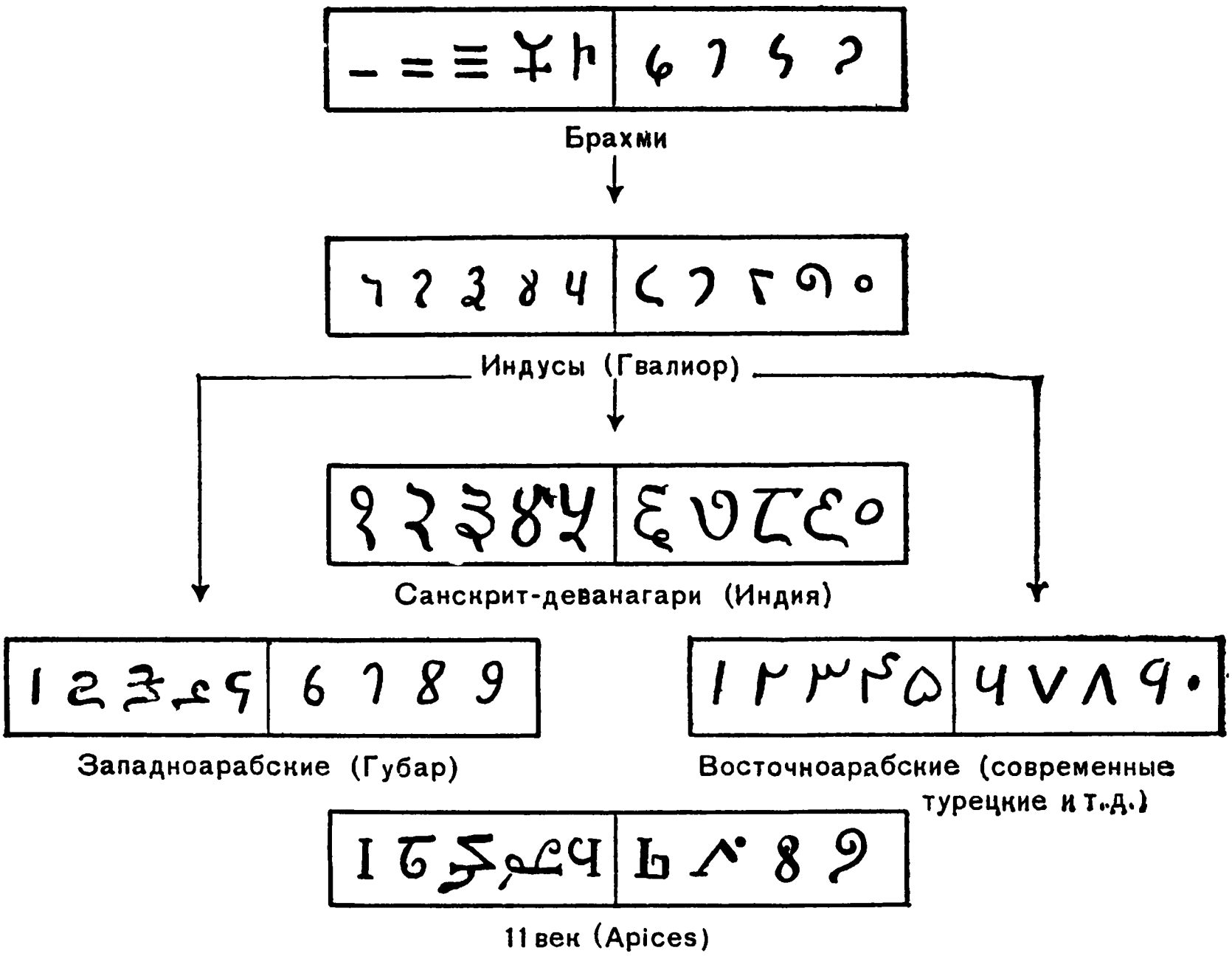


Рис 88. Предки наших цифр.

шая дошедшая до нас рукопись с новыми цифрами относится к 976 г.; она сохранилась в одном из монастырей Северной Испании; знака нуля в этой рукописи нет.

Хотя ранняя история современных наших цифр до сих пор недостаточно известна из-за отсутствия исторических документов, большинство ученых считают, что прообразы наших цифр появились в Индии[1]. Всеобщее распространение современные цифры, как и десятичная позиционная система, получили лишь со второй половины XV в.

Выдающийся французский математик П. С. Лаплас (1749—1827) писал: «Мысль — выражать все числа немногими знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту — настолько проста, что именно из-за простоты трудно оценить, насколько она удивительна. Как нелегко прийти к этому, мы видим ясно на примере величайших гениев греческой учености — Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой».

[1] Г. П. Боев в статье «О происхождении и эволюции наших цифр» («Ученые записки Саратовского ун-та», 1961, 70) приходит к выводу, что современная система цифр произошла в результате соревнования существовавших до XIV в. двух основных систем: с одной стороны, индийских цифр VII—VIII вв. (проникших в Европу через арабов в IX в.) и европейских «апексов», а с другой — цифр «губар».

§ 6. ИЗ ИСТОРИИ ДРОБЕЙ

Дроби возникли в результате необходимости измерять величины. Потребность в более точных измерениях привела к тому, что определенные единицы мер стали делить на 2, 4, 8 частей и т. д. Каждая мелкая часть первоначальной меры получала свое собственное название — так возникли конкретные дроби, например «унция» в Древнем Риме, «осьмина» на Руси и другие. Лишь спустя много времени под «осьминой» стали понимать отвлеченную дробь $\frac{1}{8}$, а под унцией — $\frac{1}{12}$ любой величины.

В подтверждение сказанного можно привести и такие факты. В Древнем Вавилоне некоторые дроби $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right.$ и другие$\left.\right)$ изображались в виде конкретных мер объема, сосудов определенной формы. В Египте квадрат со стороной в 100 «локтей», названный «сетатом», служил единицей измерения площадей. Четверть его называлась «ломаной» и обозначалась так: . Лишь намного позднее слово «ломаная»[1] и указанный символ стали обозначать отвлеченную дробь $\frac{1}{4}$. Знаком египтяне вначале обозначали только $\frac{1}{32}$ единицы объема. Впоследствии этот знак стал символом любой дроби (см. рис. 24).

В то время как в результате измерения возникали первые конкретные дроби, при делении целых чисел друг на друга долгое время результат деления выражался целым числом, остаток отбрасывался. В одной арабской рукописи XII в. требуется «разделить 100 фунтов между 11 человеками поровну». Получаемый остаток в 1 фунт предлагается променять на яйца, которых по существующей цене придется 91 штука. В остатке получится 3 яйца. Автор рекомендует отдать их тому, кто делил, или же променять на соль, чтобы посолить яйца. Известны и другие рукописи, в которых остаток предлагается не брать в счет.

«Первой дробью, с которой познакомилось человечество, — писал В. В. Бобынин[2], — была *половина* в ее строго конкретной форме, именно в виде половины какого-нибудь реального предмета». Затем последовали, вероятно, дроби $\frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots,$

[1] Применявшийся в средние века в Европе термин «ломаная» восходит к «Арифметике» ал-Хорезми, который употреблял слово «каср» (от арабского «касара» — ломать).

[2] Виктор Викторович Бобынин (1849—1919) — известный русский историк математики, профессор Московского университета, издавал журнал «Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем» (1885—1898) с приложениями под названием «Русская физико-математическая библиография». Приведенная цитата взята из статьи «Отзыв о сочинениях И. М. Бубнова», с. 114.

идущие по двоичной системе. Позднее появилась дробь $\frac{1}{3}$ и ее двоичные подразделения: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$, ... Эта линия развития находит свое отражение в древнеегипетской, древнерусской и других системах мер. От двоичных дробей египтяне перешли к дробям вида $\frac{1}{n}$, называемым основными, единичными или аликвотными дробями. Дальше понятия общей единичной дроби египтяне, видимо, не пошли. Например, дробь $\frac{3}{5}$ они выражали не единым символом, а как совокупность единичных дробей (см. гл. 1, § 1; 9).

В середине III тысячелетия до н. э. у шумеров вошли в обиход дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, для которых существовали индивидуальные знаки. Древние вавилоняне также оперировали дробями $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$. Но уже в III тысячелетии до н. э. они пользовались шестидесятеричными дробями (см. гл. 1, § 1; 10). Это — первые в мире *систематические дроби,* т. е. дроби, у которых знаменателем являются степени одного и того же числа, в данном случае числа 60. Другим примером систематических дробей являются наши десятичные дроби.

Греки широко употребляли египетские, единичные дроби. Греческие астрономы применяли шестидесятеричные дроби. В Древней Греции получают начало и обыкновенные дроби и впервые происходит расширение множества целых чисел до множества рациональных положительных чисел.

Это важнейший этап в развитии понятия о числе. Вначале дроби выражали словами. Позднее стали применять разные записи. Для единичных дробей применялась особая запись: знаменатель дроби сопровождался штрихом справа, числитель не писали. Например, λβ в алфавитной системе означало 32, а λβ′ — дробь $\frac{1}{32}$.

В I—II вв. встречаются такие записи обыкновенных дробей, в которых числитель со штрихом и дважды взятый знаменатель с двумя штрихами пишутся рядом в одной строке. Вот как записывал, например, Герон Александрийский (ок. I в.) дробь $\frac{3}{4}$: γ′δ″δ″. Герон и Диофант употребляли дробную черту, однако над чертой писали знаменатель, под нею — числитель. Были и другие виды записи дробей. Уже в V в. до н. э. греки умели производить все действия с обыкновенными дробями.

У римлян (см. гл. 1, § 1; 8) унция обозначалась чертой —; половина асса (6 унций) — буквой *S* (первой в латинском словаре Semis — половина). Эти два знака служили для записи

любой двенадцатеричной дроби, каждая из которых имела свое название[1].

Например, семь двенадцатых записывались так: S —.

Индийцы, которые обыкновенные дроби записывали, как и мы, но без дробной черты, изображали смешанную дробь, надписывая целую часть над дробной. Например, вместо современной записи $2\frac{1}{5}$ индийцы писали $\overset{2}{1}_{5}$. Такие записи, первыми дошедшие до нас, встречаются у ученого ан-Насави (X—XI вв.), уроженца Насы, города близ нынешнего Ашхабада.

В торговой практике стран ислама широко пользовались единичными дробями, в науке применяли шестидесятеричные и в гораздо меньшей мере обыкновенные дроби. Абу-л-Вафа (940—998), ал-Караджи (X—XI вв.), ал-Хассар (XII в.), применявший дробную черту, ал-Каласади (XV в.) и другие ученые излагали в своих трудах правила представления обыкновенных дробей в виде *сумм* и *произведений* единичных дробей.

Первым европейским ученым средневековья, который стал регулярно применять дробную черту[2] и современную запись обыкновенной дроби, был итальянский математик Леонардо Пизанский[3], названный также Фибоначчи[4]. В его «Книге абака» впервые встречаются термины «плюс» и «минус», признаки делимости на 2, 3, 4, таблица простых чисел до 97, а также слово «дробь» вместо «ломаное число».

В средние века, как и в древности, учение о дробях считалось самым трудным разделом арифметики. Еще в I в. до н. э. выдающийся римский оратор и писатель Цицерон как-то сказал: «Без знания дробей никто не может признаваться знающим арифметику!» Трудность изучения дробей в средневековых школах объясняется в основном тем, что учащихся заставляли заучивать наизусть разные «рецепты» без понимания. Кто знал дроби, был в почете. Автор старинной славянской рукописи XVI в. пишет: «Несть се дивно, что... в целых, но есть похвально, что в долях...» Та же мысль выражена в стихах, содержащихся в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого:

«Но несть той арифметик,
Иже в целых ответчик,
А в долях ничтоже
Отвещати возможе,
Темже о ты радеяй,
Буди в частях умеяй».

Началом нового этапа в истории дробей явились десятичные дроби (см. гл. 1, § 2, гл. 3, § 5; 16).

---

[1] В дореволюционной России аптечная унция равнялась 28,35 г. В Англии 1 унция = 1/16 торгового фунта, в Польше 1 унция = 25,344 г. в США унция — мера объема жидкостей, равная 29,573 мл.

[2] Дробная черта стала общеупотребительной лишь в XVI в.

[3] Т. е. из города Пиза.

[4] Т. е. сын Боначчи.

§ 7*. СЧЕТНЫЕ ПРИБОРЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Старейший счетный прибор абак (см. гл. 1, § 1; 3) существовал в разные времена в разных формах.

На греческом абаке проводились вертикальные линии, в соответствующие колонки раскладывались косточки или камешки подобно тому, как откладывается число на наших счетах. Так же поступали и римляне, которые отводили 3 колонки для дробей $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{24}\right.$ и др. $\left.\right)$. В Древнем Риме счет на абаке велся десятками и пятками. От римлян к нам перешло слово «калькуляция», означающее дословно «счет камешками» и употребляемое ныне в смысле «вычисления», «исчисления». Римский абак, описанный Боэцием (V—VI вв.), содержал в первой колонне справа единицы, в следующей — десятки и т. д. Для отсутствующих разрядов колонки оставались незаполненными. В средние века имели место дальнейшие изменения и совершенствования римского абака. Этому особенно способствовали Герберт, посвятивший абаку свою книгу «Правила счета на абаке», и его ученики (см. гл. 3, § 5; 15). Абак широко применялся в торговле Западной Европы на протяжении всего средневековья. При денежных расчетах его для удобства клали на скамеечку. «Скамья по-итальянски «banca», — по-немецки — «Bank». Отсюда происходит наше слово «банк» — финансово-кредитное и платежное учреждение.

Аналогом абака в древнем Китае был счетный прибор «суанпан», употребляемый в этой стране до нашего времени в виде семикосточковых счетов и японские шестикосточковые счеты, называемые «соробаном».

На идее абака основывался популярный в Западной Европе XIII—XVI вв. «счет на линиях». Счетную доску заменял лист бумаги, на котором были проведены параллельные линии на равных друг от друга промежутках. Вместо камешков или шариков пользовались картонными кружочками. Помещенный на первой линии кружочек означал единицу, на второй — десяток и т. д., в первом промежутке кружок означал 5, во втором — 50, в третьем — 500 и т. д. Основа счета тут та

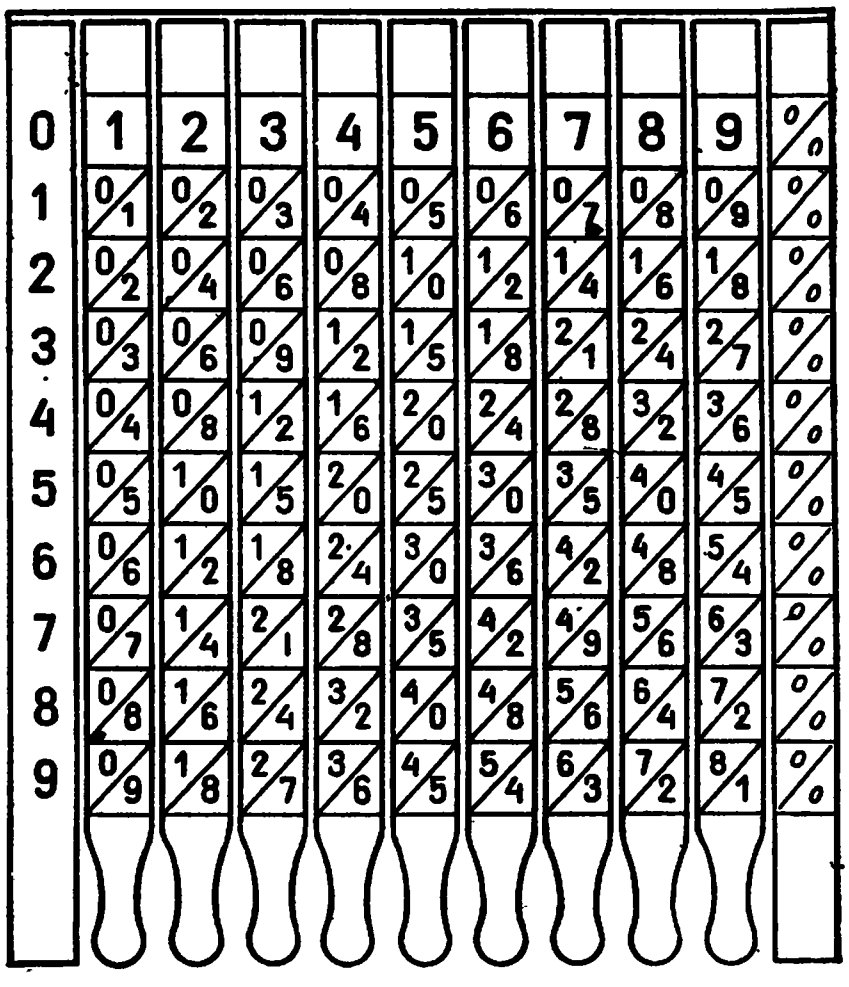


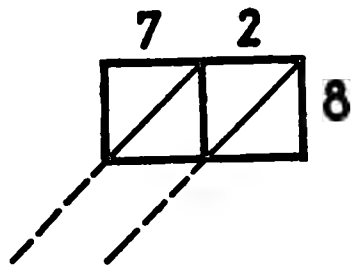
Рис. 89. Палочки Непера.

Джон Непер.

же, что в китайских и японских счетах. Счету на линиях, которым пользовались абацисты, противопоставлялся наш обычный счет, названный «счет пером», который применяли алгорифмики (см. гл. 3, § 5, п. 15, рис. 61—63).

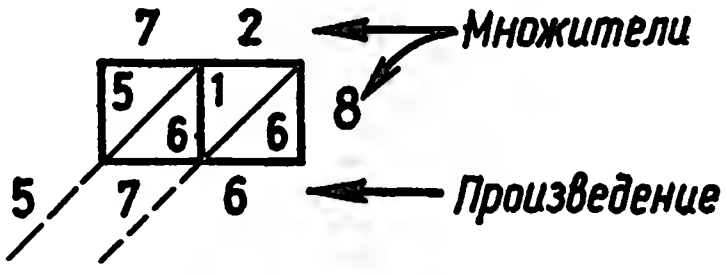
Русские счеты (см. гл. 1, § 1, п. 3) впервые появились в России в XVI в. в виде «дощаного счета», доски с нанесенными на ней параллельными прямыми. Позднее вместо доски стали употреблять раму с проволоками и косточками. Русские счеты были завезены во Францию в начале XIX в. французским математиком Ж. Понселе, вернувшимся из русского плена, в который он попал во время наполеоновского похода.

Для умножения чисел издавна существует простой прибор, палочки Непера[1] (рис. 89), описание которого было впервые дано в 1617 г. одним из изобретателей логарифмов, шотландским математиком Джоном Непером. С тех пор этот прибор был несколько усовершенствован. В целом прибор представляет собой обыкновенную таблицу умножения, расположенную на десяти подвижных линейках. В верхней части каждой клетки, разделенной косой чертой, записаны десятки, а в правой нижней — единицы. Основан этот прибор на давно известном способе умножения решеткой (см. гл. 7, § 1). Пусть надо умножить 72 на 8. Запишем вверху 72, а рядом немного пониже — множитель 8. Под этой записью начертим решетку.



Начинаем умножать с единиц. Результат записываем в клетку так, чтобы низший разряд стоял под диагональю, а высший — над диагональю. Однозначный результат записываем под диагональю.

Окончательный ответ получим суммированием чисел, записанных между диагональными линиями. Таким образом получим:



[1] Согласно другой транскрипции Непир или Напир.

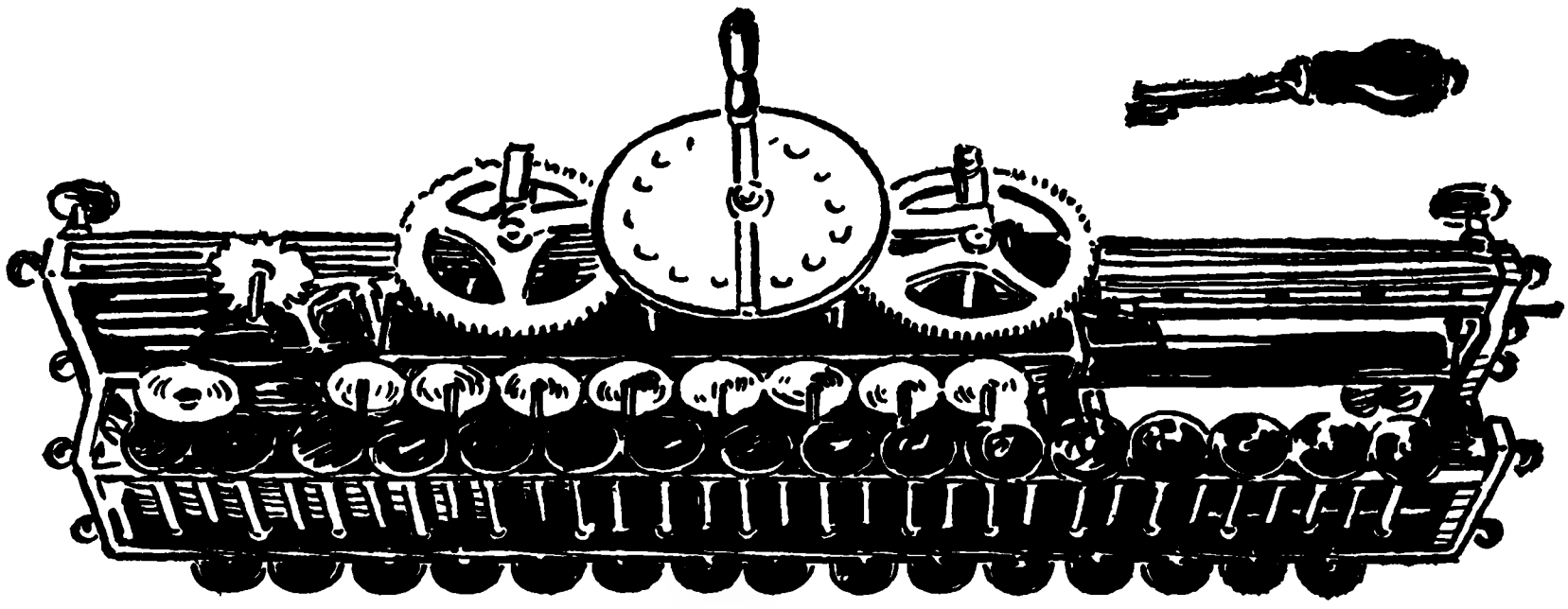


Рис. 90. Счетная машина Паскаля.

Пользуясь палочками Непера, умножим 287 на 5. Расположим подвижные линейки так, чтобы верхние их числа образовали число 287, тогда на пятой строке этих линеек получим табличку:

1	4	3
0	0	5

Для получения произведения 1435 остается сложить числа таблички по наклонному направлению. Для умножения многозначных чисел этот прием повторяется для каждого разряда множителя.

Одна из первых вычислительных суммирующих машин была сконструирована французским ученым Блез Паскалем в 1641 г., в семнадцатилетнем возрасте[1].

На этой машине (рис. 90) с зубчатыми заполнениями можно было производить сложение и вычитание чисел. Среди мотивов, побудивших юного Паскаля сконструировать машину, было желание облегчить тяжелый труд отца, сборщика налогов, тратившего дни и ночи на нескончаемые арифметические действия. Машину Паскаля усовершенствовал в 1671 году знаменитый немецкий математик Г. Ф. Лейбниц (рис. 91). Несмотря на то, что на ней можно было производить все 4 арифметических действия, она тоже не нашла применения из-за технического ее несовершенства.

Первым, пригодным для практических целей, был арифмометр Томаса де Кольмара (1820 г.), но и этот арифмометр имел ряд существенных недостатков.

В России в связи с общим оживлением экономической жизни (постройкой первой железной дороги, переходом от ручного

---

[1] Первой по времени счетная машина была изобретена в 1623 г. Шиккардом в Тюбингеме (Германия). Ее описание изложено в немецком журнале «Kosmos», 1960, № 12, с. 513—515.

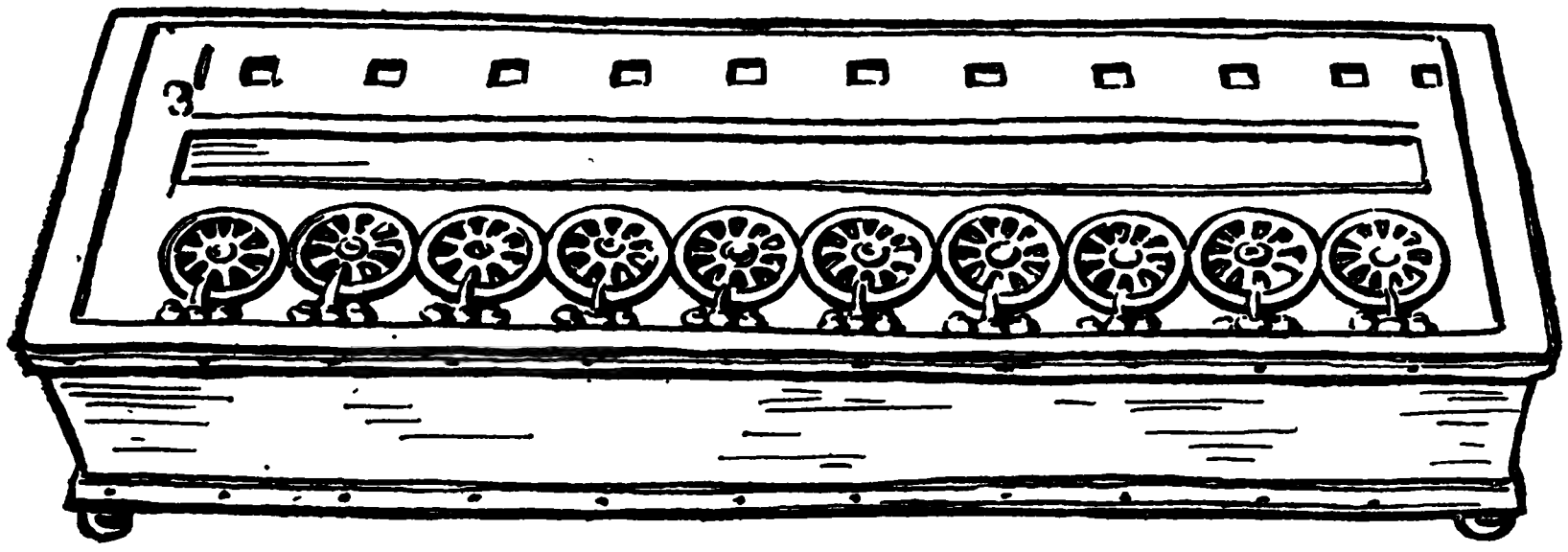


Рис. 91. Счетная машина Лейбница.

труда к использованию механизмов в некоторых отраслях промышленного производства) уже в первой половине XIX в. ученые, мастера и военные изобретают ряд машин и приборов для механического выполнения арифметических действий. П. Л. Чебышев изобретает оригинальную машину для умножения и деления чисел. Изготовленная им машина ныне хранится в одном из парижских музеев [1]. Массовое распространение получил арифмометр, изобретенный инженером Однером в 1874 г. в Петербурге (см. гл. 1, § 1)[2].

Были изобретены и другие, так называемые «малые счетные машины»: счетный автомат с пропорциональным рычагом, автомат со ступенчатым валиком и ряд различных полуавтоматов.

С дальнейшим развитием производительных сил росла потребность в усовершенствовании счетных машин. Человек учил их считать быстрее, заставил «запоминать» и записывать результаты вычислений, облегчил свой труд, поставив на машины моторы, появились клавишные цифровые машины, а затем и электронные[3]. В начале восьмидесятых годов текущего столетия на одном из московских предприятий стали изготовлять несколько типов портативных клавишных машин — микрокалькуляторы «электроника». Одним из первых представителей таких микрокалькуляторов служит БЗ-04. Он представляет собой сложное электронное устройство, содержащее свыше 6000 транзисторов. На его передней панели размещено 17 клавишей с цифрами, знаками действий и управления. С их помощью вводятся данные для решения задачи и указывается, какое действие и в какой последовательности следует выполнять. Вывод

---

[1] Один из ранних экземпляров арифмометра П. Л. Чебышева хранится в Государственном Историческом музее в Москве.

[2] Витгольд Теофилович Однер (1845—1905), уроженец Швеции, жил и работал в России с 1870 г.

[3] Для ознакомления с устройствами малых и больших математических машин и некоторыми элементами кибернетики (успешно осуществимого лишь в IX—X классах) см.: Пекелис В. Д. Маленькая энциклопедия о большой кибернетике. Кибернетика от А до Я. М., 1970. Апокин И. А., Майстров Л. Е. Развитие вычислительных машин. М., 1974 и др.

представляет небольшой экран, на котором появляется числовой результат. Выводное устройство работает на жидких кристаллах. Такой микрокалькулятор может выполнять все четыре арифметических действия с восьмиразрядными числами. В действие он приводится электротоком от небольшого элемента 316. Масса прибора меньше 200 г. Впервые подобные калькуляторы были изготовлены в Японии.

В настоящее время изготовляют микрокалькуляторы более совершенные — они могут оперировать с числами в 16 разрядов.

Клавишные микрокалькуляторы предназначаются в основном для счетно-бухгалтерской работы.

Развитие производительных сил и прогресс науки потребовали создания более мощных автоматических машин для вычислений. Первые автоматические большие счетные машины были электромеханическими. Их называли автоматическими потому, что после того как в них устанавливали (вводили) первоначальные данные и условия задания, они действовали без вмешательства человека до выдачи окончательного результата. Считали они довольно медленно и поэтому не могли удовлетворить все возрастающие потребности в ускорении расчетов. Для научных исследований и для инженерных расчетов нужна была счетно-аналитическая быстродействующая машина.

Впервые идею создания счетно-аналитической машины высказал английский ученый Чарльз Беббедж. В 1833 г. он описал свой проект аналитической машины. По проекту изобретателя эта машина была громадным арифмометром с арифметическим и запоминающим устройствами и программным управлением. Несмотря на то что ее автор посвятил весь остаток своей жизни осуществлению проекта, низкий технический уровень того времени не позволил осуществить создание этой аналитической машины.

Первая большая вычислительная машина МАРК-1 была построена в 1944 г. в США. В это же время — инженер Дж. Преспер (младший) и физик Дж. У. Мокли включились в работу по созданию другой машины по заказу артиллерийского управления армии. По их проекту и под их руководством в конце 1945 г. была создана машина ЭНИАК — электронно-цифровой интегратор и вычислитель. Эта машина предназначалась для узких целей — вычисления таблиц артиллерийской стрельбы. ЭНИАК-1 работала на 19 000 электронных лампах. Она занимала зал площадью 150 м².

В 1952 г. в США была пущена в ход более совершенная машина МАНИАК-1 — математический анализатор, числовой интегратор и вычислитель. В 1957 г. появилась МАНИАК-2.

В Советском Союзе к разработке вычислительных машин такого характера приступили позже, чем в США. Тем не менее у нас уже в 1950 г. была построена под руководством академика С. А. Лебедева коллективом ученых и инженеров малая элект-

ронно-счетная машина (МЭСМ). В 1953 г. тот же коллектив создал большую электронную счетную машину БЭСМ-1, а за ней появилась целая плеяда машин «Стрела», «Урал», «Киев», «Мир» и др. Это первое поколение электронно-вычислительных машин ЭВМ.

В свое время БЭСМ-1 была лучшей в Европе. Она производила сначала 8 тысяч, а после усовершенствования 10 тысяч математических операций в секунду. Она обладала достаточно емкой памятью. Теперь эта машина демонтирована, но она стала родоначальницей целого семейства БЭСМ-2, БЭСМ-3, ... БЭСМ-6.

Машины первого поколения работали на электронных лампах и потребляли очень много энергии. Принцип их работы таков. Электронная лампа при определенных условиях может пропускать или задерживать электрический ток. ЭВМ работали на двоичной системе счисления, в которой только две цифры — 0 и 1. Если электронная лампа пропустила ток, этот сигнал-импульс означал единицу. Лампа задержала ток — нуль. Сигналы: импульс, пауза, импульс — означает 101, т. е. 5. Условие задачи вводится в машину в десятичной системе счисления, а машина автоматически выражает все данные в двоичной системе и выполняет указанные операции в этой системе. Конечный результат также автоматически машина переводит в десятичную систему и в таком виде выдает его. Современные ЭВМ работают не только в двоичной системе. Во многих из них используются более экономичные системы счисления.

Машины второго поколения работали на полупроводниках (транзисторах и диодах). Они требовали энергии значительно меньше, а быстродействие их было во много раз больше. Эти машины были значительно экономичнее.

В машинах третьего поколения используются микроэлектронные схемы, содержащие в одной ячейке десятки транзисторов, резисторов и диодов, т. е. так называемые интегральные схемы. Эти схемы состоят из ряда тончайших пленок (толщина их выражается в стотысячных долях миллиметра), что позволяет в 1 $мм^3$ разместить до 100 миллионов приборов. Применение интегральных схем позволило уменьшить размеры (габариты) ЭВМ в десятки раз, увеличить скорость их действия и экономить расходуемую электроэнергию. С середины 60-х годов у нас стали выпускать ЭВМ четвертого поколения на больших интегральных микросхемах.

БЭСМ-6 машина третьего поколения. Ее элементной базой являются полупроводниковые приборы. Конструктивно она выполнена в виде отдельных стоек: стойки центрального вычислителя, стойки оперативной памяти, стойки питания и т. д. Она предназначена для решения разнообразных задач науки и техники, связанных с приемом, хранением, переработкой и выдачей большего объема информации. БЭСМ-6 может одновремен-

но решать несколько задач, а их условия воспринимать с перфокарт, с перфолент, с магнитных барабанов, или лент, с телеграфной линии.

БЭСМ-6 во много раз меньше своей прародительницы БЭСМ-1, но по своей мощности это машина-богатырь: за 1 с она выполняет миллион математических операций. Производительность ее значительно повысилась за счет сверхбыстродействующего запоминающего устройства.

Характеризуя ЭВМ «Мир», руководитель разработки академик В. М. Глушков указал, что эта машина может запомнить 6—7 страниц текста (12 000 символов). «Она от рождения помнит основные формулы, которые мы учили в школе, и знает даже кое-что из вузовской программы». Ее прозвали электронным инженером.

В самых мощных современных ЭВМ объем памяти превышает 100 000 символов и это не предел. Объем памяти машин последующих поколений станет еще больше. Будет расти и скорость процесса вычислений, а вычислительные устройства станут одновременно выполнять много разнообразных операций.

В современных ЭВМ имеется пять основных устройств: вводное, запоминающее, арифметическое, управляющее, выводное и дополнительное устройство для контроля и обнаружения неисправностей.

Решение задачи на ЭВМ состоит в последовательном выполнении математических операций над числами. Числа задают в виде определенных знаков, которые воспринимает данная машина. Эти знаки вызывают в машине соответствующие импульсы (возбуждения). Перед тем как ввести в машину задачу, ее расчленяют на ряд простых операций и указывают порядок (последовательность) выполнения необходимых операций. Такая подготовка к решению служит для машины программой, которой она и руководствуется, выполняя решение. Затем, используя условные знаки, которые воспринимает данная ЭВМ, программу через вводное устройство передают в оперативный накопитель. Здесь одни из данных условий остаются в накопителе до того, пока они не потребуются, а другие передаются в постоянную «память». Те же числа, которые потребуются для первоочередного действия, направляются в арифметическое устройство, где с ними будет произведено то действие, которое указано в программе. Для запоминания результатов промежуточных действий в ЭВМ есть оперативная «память» небольшого объема, но быстродействующая. Для следующей операции данные поступают в арифметическое устройство из оперативного накопителя или из оперативной «памяти» и т. д. до конца решения задачи.

Окончательный результат — ответ решения задачи поступает в выводное устройство и печатается на бумажной полосе или высвечивается на экране. Согласно заложенной программе,

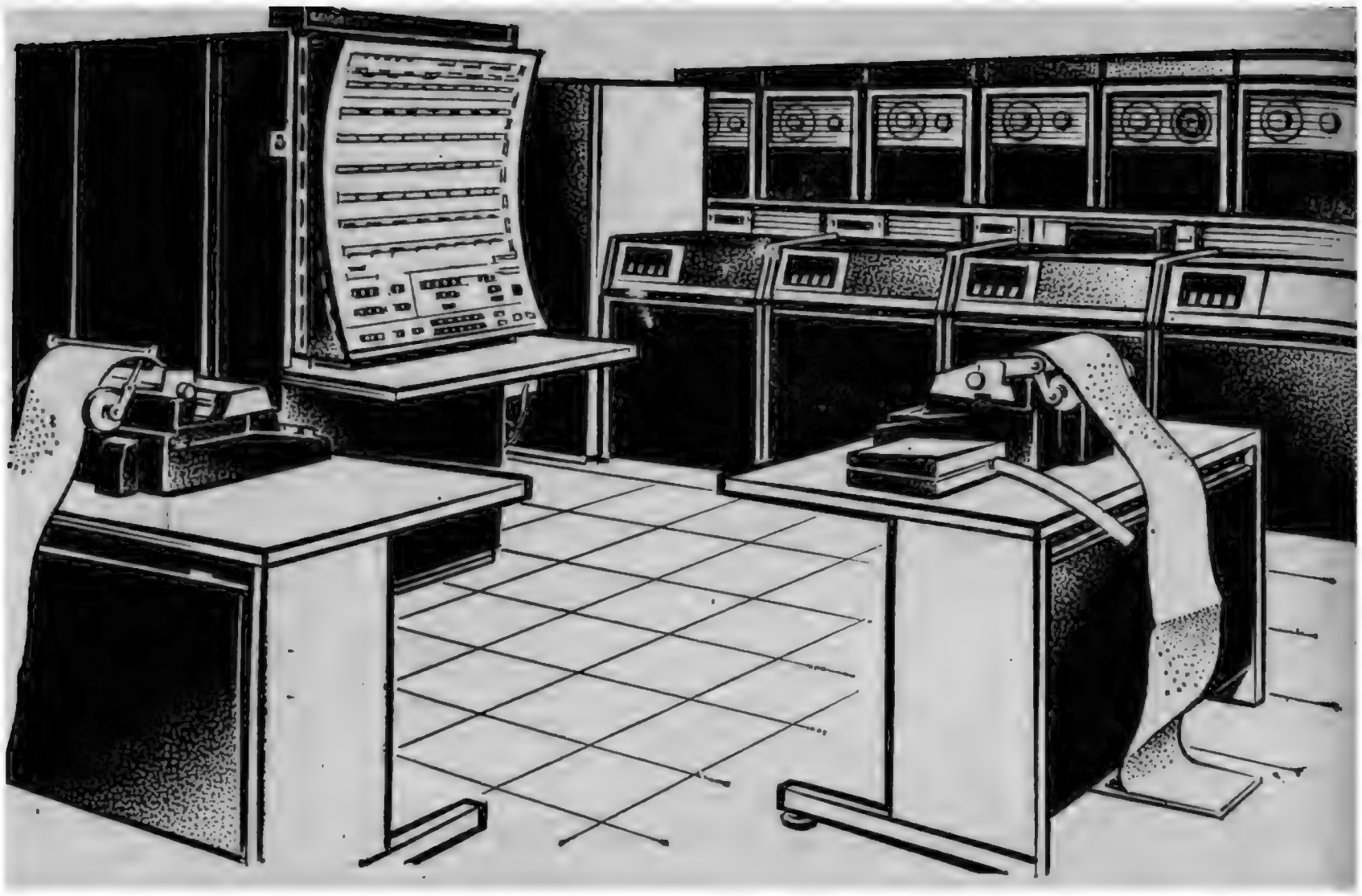


Рис. 92. Общий вид ЭВМ третьего поколения (стационарная ЭВМ, входящая в единую систему программно-совместных машин).

всей работой руководит и контролирует управляющее устройство.

В 80-е годы нынешнего века в практику промышленного производства стало входить международное разделение труда, что значительно повышает производительность труда и качество изделий. Коснулось это и производства ЭВМ. Например, в 1978 г. в машину с минским комплектом внешних устройств стали ставить блоки памяти, сделанные в Болгарии (завод в Старо-Загоре), вводные и выводные устройства из Польши, ряд деталей из ГДР. Наладку же этой машины выполняют в Минске. От такого комплексного производства машины только выигрывают. Они стали обладать памятью свыше 20 миллионов знаков.

В наше время, время бурного развития авиации и радиотехники, в век использования атомной энергии и освоения космоса с невиданной быстротой растет число сложных математических задач, в которых требуется производить громадное количество операций за чрезвычайно короткий срок. Вот почему на смену простейшим счетным приборам и механизмам пришлось создать мощные ЭВМ и целые системы программно-совместимых машин (рис. 92).

Электронно-вычислительные машины используются при планировании и учете в народном хозяйстве страны, помогают обрабатывать данные по предсказанию погоды, в составлении географических и топографических карт. При их участии разраба-

тываются меры по охране нашей Родины. К ним обращаются, рассчитывая полеты в космос, при составлении графиков движения транспорта и обеспечения пассажиров билетами. С их помощью можно решать шахматные задачи, переводить тексты с одного языка на другой, они служат для исследования в области языка и литературы. В 1960, 1961 гг. советские математики применили установленную в академгородке Новосибирска ЭВМ для расшифровки письменности народа майя, для чего каждый иероглиф и рисунок были переведены на язык математики.

Область применения ЭВМ с каждым днем все более расширяется. Постепенно они придут на каждое предприятие, в каждый научно-исследовательский институт. Они будут работать и в сельском хозяйстве, и в промышленности, и в науке. Подобно гигантским современным экскаваторам, заменяющим сотни людей, электронные вычислительные машины, облегчая умственный труд, будут заменять многие тысячи людских умов. Но дело не только в этом. ЭВМ позволяют находить и использовать принципиально новые методы всевозможных исследований. Они верно служат прогрессу общественного развития.

§ 8. КАК НАУЧИЛИСЬ ЛЮДИ ИЗМЕРЯТЬ ВРЕМЯ. НОВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЕКУНДЫ

Еще в глубокой древности люди заметили, что смена дня и ночи происходит через какой-то определенный срок. Чередование труда и отдыха в своей деятельности человек тесно связал с этим явлением. Так появилось представление о *сутках*, первой естественной единице измерения времени[1].

В соответствии с числом пальцев на одной руке, затем на двух руках зародилась вначале пятидневная «малая неделя», а позже десятидневная — «большая неделя». Простые наблюдения за периодически изменяющимся видом луны — *фазами* — привели к второй естественной единице измерения времени — *месяцу*, т. е. промежутку времени от одного новолуния до следующего. Издавна луну называли месяцем не только на русском, но и на других европейских и восточных языках. На основе суток и месяца были составлены первые лунные календари древних китайцев, вавилонян и других народов. Месяц равнялся одно время 29,5 суток. Семидневная неделя установилась как промежуток времени от одной лунной фазы до другой, от новолуния до первой четверти.

С переходом людей от кочевого к оседлому образу жизни, с развитием земледелия возникла потребность отличать периодич-

---

[1] Подробнее о календаре и измерении времени см.: Мартынов Д. Я. Века и мгновения, изд-во Московского университета, 1961.

Рис. 93. Наблюдение за предутренним восходом Сириуса в Древнем Египте.

ность чередования весны, лета, зимы и осени, связанную с движением Солнца. Появилась более крупная единица измерения времени — *год*. Так постепенно создавался *солнечный календарь*.

Продолжительность года определялась вначале очень неточно. Древние египтяне, например, принимали за год промежуток времени от одного разлива Нила до следующего, и лишь затем — от одного предутреннего восхода яркой звезды Сириуса до другого. Постепенно они установили продолжительность солнечного года в 365 дней. В связи с тем что в основу измерения времени было положено вращение Земли вокруг своей оси, при построении календарей возникали большие трудности. Ведь ни лунный месяц, ни солнечный год не содержит целого числа суток. Продолжительность первого — 29 суток, 12 часов, 44 минуты и 3 секунды, а второго — 365 суток, 5 часов, 48 минут, 46 секунд. Поэтому издавна ввели условный календарный месяц с целым числом суток и условный календарный год, стремясь к тому, чтобы год по возможности меньше отличался от истинного года (продолжительность полного оборота Земли вокруг Солнца). На протяжении многих веков были неоднократные попытки улучшить календарь. Одна из важнейших реформ календаря в

древности была предпринята в 46 г. до н. э. по указанию римского императора Юлия Цезаря. Календарь, созданный тогда группой ученых во главе с астрономом Созигеном, в честь Цезаря был назван юлианским. По юлианскому календарю (ныне — «старый стиль») год содержал 365 суток, но каждый четвертый год — високосный[1] — 366 суток. Так как средняя продолжительность года была, таким образом, 365 суток 6 часов, то календарный год оказался длиннее солнечного на 11 минут 14 секунд. Каждые 128 лет накапливалось расхождение в целые сутки, а когда в XVI в. была предпринята новая реформа календаря, это расхождение составило уже 10 суток (проверьте!).

По рекомендации комиссии специалистов римский папа Григорий XIII одобрил в 1582 г. проект нового календаря, предложенного итальянским ученым Алоизия Лилио. Этот календарь назван григорианским («новый стиль»). День после 4 октября 1582 года был объявлен 15-м октября, чтобы поправить ошибку в 10 дней, накопившуюся до тех пор. Новый стиль отличается от старого тем, что в каждые 400 лет имеется меньше на 3 високосных дня, а именно, годы, оканчивающиеся двумя нулями, считаются високосными тогда, когда они делятся без остатка на 400. Например, 1600, 2000 — високосные годы, 1700, 1800, 1900 — простые.

Таким образом, разница в 1 сутки накапливается не за 128 лет, как в старом стиле, а за 3300 лет (проверьте!). Календарный год нового стиля стал значительно ближе к истинному солнечному году.

Из-за религиозных соображений многие некатолические государства долгое время сопротивлялись введению календаря нового стиля. В XX в. расхождение между старым и новым стилем составило уже 13 дней. Поэтому, когда после Великой Октябрьской социалистической революции в нашей стране был введен новый стиль, пришлось считать день 2 февраля 1918 г. 15-м февраля.

* *

*

Многие календарные термины берут свое начало от древних римлян. Само слово «календарь» означало в Риме долговую книгу. Должники платили проценты в день *календ* — так назывался первый день каждого месяца. Первый месяц года был назван *январем* в честь двуликого бога Януса, одно лицо которого было обращено вперед (в будущее, к новому), а другое —

---

[1] Искажение латинского слова *bissextilis* — «еще раз шесть». Римляне помещали добавочный день между 23 и 24 февраля и, отсчитывая оставшиеся до начала следующего месяца дни, получали раз в 4 года «дважды шестой» день до начала марта.

назад (к старому, прошлому); *февраль* происходит, как предполагают, от латинского «februm» — очищение. Это был месяц религиозного покаяния. В честь бога войны Марса был назван месяц *март*. В *апреле* на деревьях раскрываются почки, слово «aperire» и означает «раскрытие». Месяц весны *май* был назван по имени бога Majus, покровителя роста, *июнь* — по имени богини неба Юноны. *Июль* и *август* были так названы в честь римских диктатора Юлия Цезаря и императора Августа. Первоначально римский год состоял из десяти месяцев. Последние четыре из них назывались:

September — „седьмой“ (сентябрь)
Oktober — „восьмой“ (октябрь)
November — „девятый“ (ноябрь)
December — „десятый“ (декабрь).

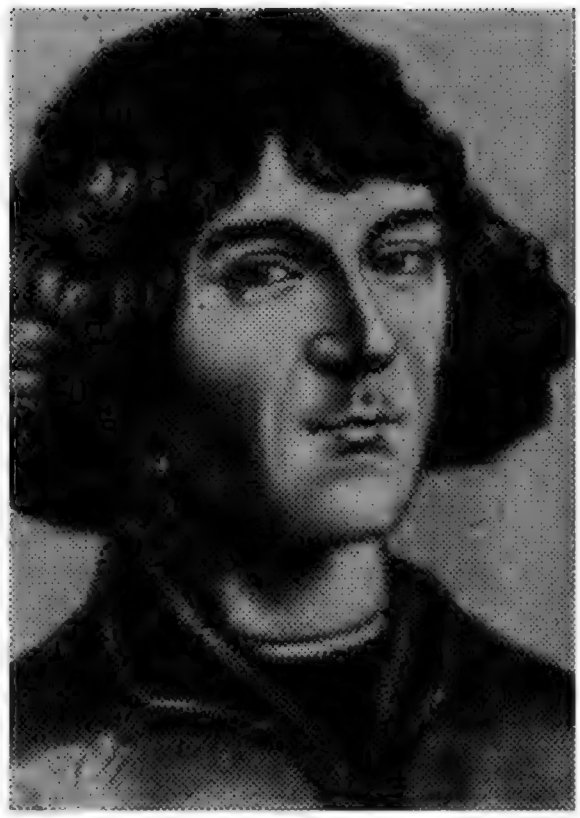
Названия дней недели в некоторых языках издавна связаны с названием небесных тел: Солнца, Луны, Марса, Меркурия, Юпитера, Венеры. «Неделей» (не делать) называли в старину, а в некоторых славянских языках и теперь еще называют, день отдыха. Первый день после «недели» был назван «понедельником», второй — «вторником», четвертый — «четвергом», пятый — «пятницей». Середина недели была названа «средой». «Суббота» происходит от древнееврейского «шабат» — покой, отдых. Согласно библии этот день был «днем отдыха бога». С религиозной верой в мифическое «воскресение» Христа связано название воскресного дня.

* *
*

Применяемый ныне почти во всех странах мира календарь нового стиля тоже не лишен крупных недостатков, из которых самыми главными являются: неравенство месяцев, четвертей года и полугодий и отсутствие согласованности между разными единицами измерения времени. Так, например, ни месяц, ни год не имеют целого числа недель, месяц не имеет постоянного числа дней, одни и те же числа месяца приходятся на различные дни недели и т. п. Поэтому в последнее десятилетие был поднят вопрос о новой реформе и о введении всемирного единого календаря. По инициативе Организации Объединенных Наций разработано несколько проектов нового календаря. По одному из этих проектов год состоит из 4 четвертей (кварталов) по 91 дню. Первый месяц каждого квартала начинается с воскресенья и имеет 31 день, второй месяц в 30 дней начинается со среды, третий — с пятницы. 365-й день каждого года не входит в состав недель и месяцев, оставляется без числа и объявляется «Днем мира и дружбы народов». Так же без числа оставляется прибавляемый в високосные годы день. После утверждения государствами, членами Организации Объединенных Наций, новый между-

народный календарь начнет применяться почти во всех странах мира.

Бурное развитие современной науки и техники потребовало нового определения основной единицы измерения времени — секунды. Ее до недавнего определяли как $\frac{1}{86\,400}$ часть средних солнечных суток. Ученые установили, что в силу неравномерного вращения Земли около своей оси, точность вышеуказанного определения уже не удовлетворяет требованиям современной техники. На Международной конференции по мерам и весам, состоявшейся в 1960 году в Париже, было принято новое определение секунды, основанное не на периоде вращения Земли около своей оси, а на периоде обращения ее по орбите вокруг Солнца. Согласно новому определению секунда равна 1/31 556 925,9747 части тропического 1900 года (промежутка времени между двумя последовательными весенними равноденствиями), причем непостоянство последнего определенным образом учтено.



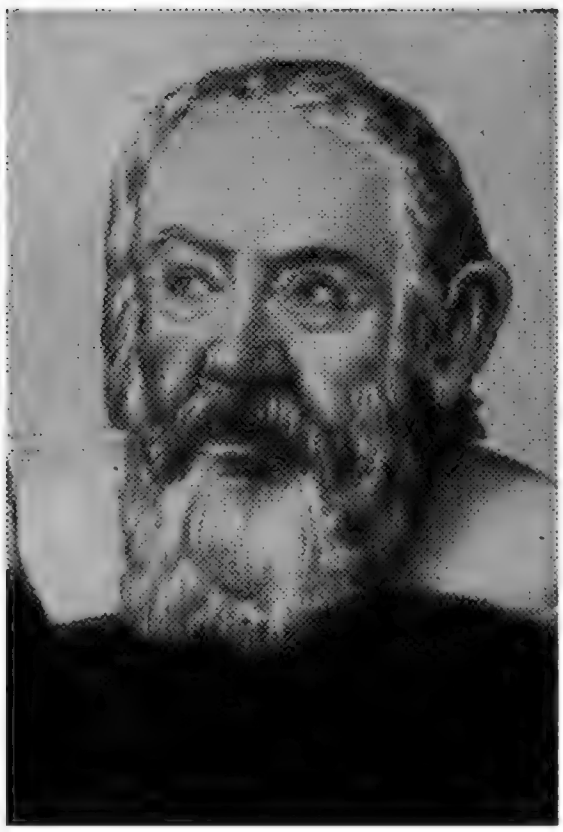
Н. Коперник.

§ 9. О ПРОИСХОЖДЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ СУЕВЕРИЙ

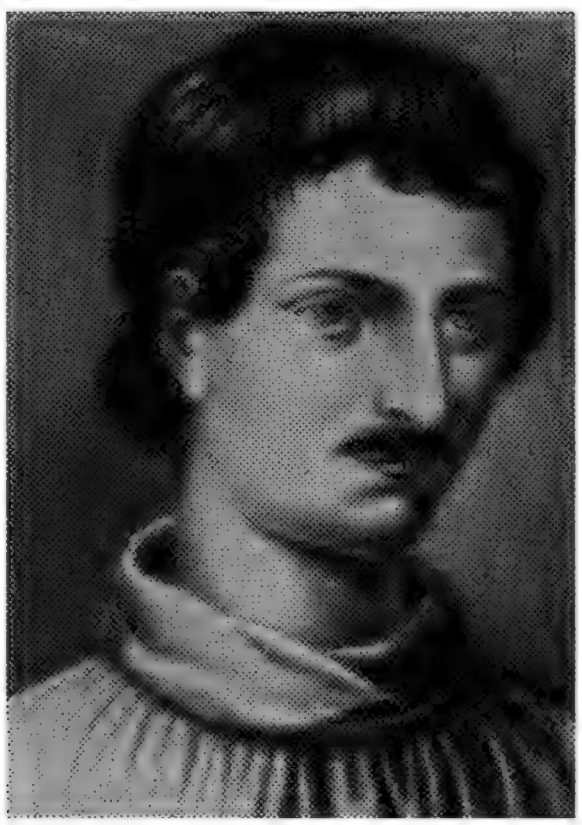
Религия, вера в существование сверхъестественных, нереальных существ (богов, ангелов, чертей и т. п.), возникла в глубокой древности, когда люди не имели правильного представления о вселенной, когда грозные стихийные явления — гром, молния, буря, наводнение, землетрясение, пожары — были человеку непонятны, таинственно загадочны; когда первобытный человек был совершенно беспомощен перед могучими силами природы.

Невежество, беспомощность и страх породили также разные суеверия: гадания, колдовство. Первобытный охотник, например, поражал копьем им же нарисованную на песке фигуру зверя, наивно считая, что между животным и его изображением существует какая-то тайная, сверхъестественная связь, и что, уничтожая рисунок, он убивает и самого зверя.

С появлением классового общества, основанного на эксплуатации человека человеком, религия стала орудием угнетения масс трудящихся, усиливая социальную придавленность масс. Религия являлась во все времена источником многих суеверий, включая и *числовые.* Взять к примеру число 7. В глубокой



Г. Галилей.



Джордано Бруно.

древности, на одной из начальных стадий развития счета, это число долгое время считалось неопределенно большим количеством (такими в разные времена считались числа 10, 20, 40[1] и некоторые другие). Следы такого представления о числе семь сохранились до наших дней в пословицах и поговорках, вроде: «Семь раз отмерь, один раз отрежь», «Семеро одного не ждут», «Один с сошкой, семеро с ложкой» и т. п. Религия же окутала число семь таинственной оболочкой. Древние вавилоняне считали это число священным. От вавилонян религиозное почитание семерки перешло к другим народам. В библии рассказывается, будто бог создал мир за шесть дней, посвятив седьмой день отдыху. Греки признавали 7 мудрецов и 7 чудес мира, римляне считали, что Рим построен на 7 холмах и т. п. Предрассудки, связанные с числом 7, передавались европейским народам, в том числе и русскому. В царской России число 7 применялось в колдовстве и заклинаниях. Невежественные религиозные лекари, так называемые знахари, прибегали обычно к приемам, рассчитанным на суеверие больных. Среди этих приемов фигурировало многократное повторение «святой» семерки: «Сделай настой из семи порошков на семи водах, пей семь дней по семи ложек».

* * *

Суеверные люди связывают несчастье и неудачу с числом 13, называемым «чертовой дюжиной».

Откуда произошло это суеверие? В отдаленные времена у некоторых народов число 12 пользовалось уважением и было положено в основу системы счисления (двенадцатеричной). Число 12 обладает многими делителями: 2, 3, 4, 6, что важно для практики. Поэтому число 12 считали удобным, хорошим числом, а следующее за ним простое число 13, естественно,

[1] «Сорок сороков церквей» означает «очень большое число церквей», «сороконожка» имеет значение «многоножки» и т. п.

представлялось неудобным, нехорошим. Религия окутала число 12 оболочкой «счастья», а 13 — «несчастья». Так, например, в библии говорится о 12 избранных племенах, 12 святых апостолах и т. д. Одновременно по религиозному сказанию один из 13 учеников Христа оказался предателем.

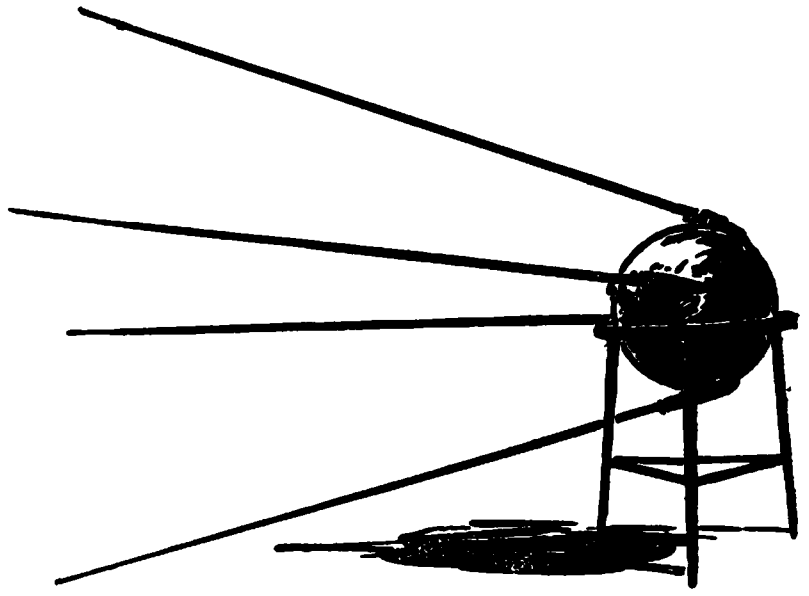


Рис. 94. Советский первый искусственный спутник Земли, запущенный 4 октября 1957 г.

В некоторых капиталистических странах суеверия, связанные с числом 13, до того распространены и сильны [1], что для борьбы с ними учреждаются особые общества. Так, например, в Лондоне создан «клуб 13», в котором стол умышленно сервируется для 13 человек, а меню составляется из 13 блюд... Некоторые легкомысленные люди иногда становятся суеверными в результате чистой случайности, связавшей число 13 с неприятным для них событием. При желании можно найти, конечно, немало случаев, когда, наоборот, это число становится «счастливым»...

Числовые, как и всякие другие суеверия, наносят большой вред человеку. Они извращают представления о вещах, мешают созданию научного понимания законов природы и общества, приучают человека к апатии и безделию, подавляют в нем волю и веру в собственные силы.

* *
*

Религия не только способствовала распространению вредных суеверий. Религия и церковь на протяжении многих веков вели ожесточенную борьбу против науки и ученых, опровергавших религиозные учения.

Против религии и суеверий выступали древнегреческие математики, философы и ученые Демокрит из Абдеры (460—370 г. до н. э.), Диагор Мелосский и др. Первая в мире женщина-математик, язычница *Гипатия*, была убита в Александрии в 415 г. религиозными христианскими фанатиками. В эпоху господства католической церкви подвергался гонениям и преследованиям великий итальянский ученый Галилео Галилей (1564—1642) за то, что развил учение Коперника о движении Земли и выступил против поддерживаемого церковью учения Птолемея о том, будто Солнце вращается вокруг Земли. За свои научные взгляды, за проповедование учения Коперника и материалистиче-

[1] В Америке, Англии и других странах есть дома, в которых квартиры пронумерованы: 1, 2... 11, 12, 14, 15... Квартиры № 13 нет!

ских идей о бесконечности вселенной итальянский ученый Джордано Бруно был в XVI в. обвинен римской инквизицией в ереси и сожжен на костре. За критику библии и иудейской религии был изгнан из общины и долгие годы скитался выдающийся философ-материалист Барух Спиноза (1632—1677). Гонениям церкви подвергались философ и математик Рене Декарт (1596—1650), основоположник научной биологии и учения об эволюции живой природы Чарлз Роберт Дарвин (1809—1882) и многие другие.

О преследовании церковниками людей науки рассказывает в своей книге «Математика и ее значение для человечества» (Гиз, 1923 г.) выдающийся русский математик академик Владимир Андреевич Стеклов (1863—1926), именем которого назван институт математики Академии наук СССР. «Наука и религия, писал Герцен, заклятые враги».

Но, несмотря на ожесточенное сопротивление церкви, наука безудержно прокладывала себе путь к истине и в наши дни достигла огромных успехов. Выдающиеся научные и технические достижения, в частности создание электронно-вычислительных машин, запуск искусственных спутников Земли (рис. 94) и космических кораблей, еще раз убедительно опровергают суеверия и религиозное учение о том, будто человек бессилен перед лицом природы, и доказывают, что только с помощью науки человек может познать истинные законы природы и использовать их для удовлетворения своих потребностей.

Глава 8.
ИЗ ИСТОРИИ АЛГЕБРЫ

§ 10. СТАРИННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ И ДЕЙСТВИЯ НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

Зарождение математических развлечений в виде шуточных и занимательных задач, головоломок, отгадывания чисел и прочих разнообразных задач на смекалку относится к глубокой древности. Следы их можно найти в древнеегипетских, китайских, греческих, индийских, арабских и других старинных документах и книгах. Развитие этого типа задач шло совместно с общим развитием математики и обусловливалось разными факторами, среди которых были: любознательность, пытливость человеческого ума и интерес к курьезам, чувство юмора, удовлетворение и радость, испытываемые в результате успешной умственной деятельности.

Десятки и сотни математических задач на смекалку переходили из поколения в поколение, из уст в уста, от народа к народу, из одних книг в другие. Одна из первых занимательных книг по математике «Задачи для изощрения ума юношества» приписывается ученому монаху VIII в. Алькуину из Йорка, работавшему директором школы при дворе франкского короля Карла Великого. Эта книга пользовалась большим успехом на протяжении почти целого тысячелетия. Старейшая, сохранившаяся до нашего времени копия рукописи Алькуина была переписана около 1000 года. Из этой рукописи взяты многие, пользующиеся известностью и теперь, занимательные задачи, среди которых задача «о собаке, догоняющей кролика», «о переправе через реку волка, козы и капусты» и другие.

Следующий, дошедший до нас замечательный сборник «Занимательных и приятных математических задач» был издан в Лионе (Франция) в 1612 г. Его автор, Баше де Мезириак (1581—1638), был не только математиком, но и видным поэтом и писателем, писавшим как на родном французском, так и на латинском и немецком языках. Упомянутая его книга содержала 50 задач с решениями и переиздавалась в XVII—XIX вв. Она получила большую известность и была переведена на многие языки, в том числе и на русский (в 1877 г.).

Приведем несколько задач на «задуманное число» из книги Баше де Мезириака. Составляя соответствующие алгебраические тождества, разъясним сущность способа отгадывания.

Задача 27. «Предложи задумать четное число и умножить его на три, половину полученного произведения умножить снова на три. Спроси, сколько девяток содержится в полученном числе.

Чтобы найти задуманное число, следует заменить каждую девятку двойкой».

Пример: Пусть задуманное число 16. Прозведя последовательно указанные действия, получим: $16 \cdot 3 = 48$; $48 : 2 = 24$; $24 \cdot 3 = 72$.

Полученное число 72 содержит 8 девяток, т. е. $72 = 8 \cdot 9$. Задуманное же число содержит 8 двоек ($16 = 8 \cdot 2$).

Задача и ее решение сводится к следующему алгебраическому тождеству, в котором задуманное число обозначается через $2x$:

$$\frac{2x \cdot 3}{2} \cdot 3 = 9x.$$

Таким образом, число девяток, о котором идет речь в задаче, всегда равно x, т. е. половине самого задуманного числа. Узнав значение x, мы легко «отгадываем» задуманное число $2x$.

Задача 28. «Задумаем четыре однозначных числа. Умножим первое на 2 и прибавим 5, полученное умножаем на 5 и прибавляем 10 и второе число; полученный результат умножаем на 10 и прибавляем третье число; новый результат умножаем опять на 10 и прибавляем четвертое число. Из последнего результата вычтем 3500, тогда полученная разность есть число, составленное из четырех цифр, обозначающих по порядку задуманные числа».

Пример: Задуманы 7; 3; 5; 2. Получим:

$$\{[(7 \cdot 2 + 5)\,5 + 10 + 3]10 + 5\}\,10 + 2 = 10\,852;$$

$$10\,852 - 3500 = 7352.$$

Для составления соответствующего алгебраического тождества обозначим задуманные числа через a, b, c, d.

Получим

$$\{[(2a + 5)\,5 + 10 + b]\,10 + c\}\,10 + d = 10000a + 100b + 10c + d + 3500.$$

После вычитания числа 3500 получается число $1000a + 100b + 10c + d$, которое в десятичной позиционной системе счисления и записывается: $abcd$.

А вот еще одна задача, в которой отгадывающий не задает никаких вопросов.

Задача 29. «Предложи задумать число, умножить его на 2, затем прибавить какое тебе задумается число (назови его сам),

результат разделить на 2 и из частного вычти задуманное число. После этого назови половину того числа, которые ты сам раньше предложил прибавить. Это и будет результат, который получил задумавший число».

Пример: Задумано число 21. Отгадывающим названо число 8. Имеем: $\frac{2\cdot 21+8}{2}-21=4$.

Последнее есть половина числа 8.

Алгебраически: $\frac{2x+a}{2}-x=\frac{a}{2}$.

Вслед за книгой Баше появились и другие сборники занимательных задач во Франции, Германии и Англии. В России появление отдельных занимательных задач в математических рукописях тоже относится к XVII в., в печати же такие задачи появились впервые в 1703 г. в «Арифметике» Магницкого (см. зад. 10, 11 и др.). Специальные русские сборники занимательных задач стали появляться в конце XVIII в. Один из них был издан в 1789 г. в Петербурге И. Краснопольским под названием «Гадательная арифметика для забавы и удовольствия».

Приведем примеры шуточных задач из книги Ивана Буттера «Занимательные и увеселительные задачи и загадки», изданной в Петербурге в 1831 г.

Задача 30. «Три яблока разделить двум отцам и двум сыновьям так, чтобы каждому достало по целому яблоку».

Решение. Поликарп, Сидор и Карп. Поликарп — отец Сидора, Сидор — отец Карпа.

Задача 31. «Написать сто без нулей».

Первое решение: C (в латинской письменной нумерации).

Второе решение: $99\frac{9}{9}$.

Сборники задач на смекалку составили русский поэт XIX в. В. Г. Бенедиктов, известные педагоги В. И. Обреимов и Е. И. Игнатьев. В литературной обработке книги Игнатьева «В царстве смекалки», изданной в 1907—1911 годах, принимал участие замечательный русский писатель В. Г. Короленко.

В одном из наилучших современных сборников занимательных задач «Математические развлечения» бельгийского профессора М. Крайчика имеется глава, посвященная «играм», в которой излагаются алгебраические приемы при игре в шахматы или шашки.

Пусть шашка находится на поле B. Через B^k обозначают, что шашка находится по диагонали на k столбцов правее, через B^{-k} — левее первоначальной позиции. Связку «или» обозначают знаком сложения +, «и» — знаком умножения, точкой. Таким образом, вместо словесного выражения «один столбец налево, или один столбец направо» пишут символически:

$$B^{-1}+B^{1}.$$

Если шашка продвинулась вправо на одну клетку, затем еще на одну клетку, то она будет находиться вправо от первоначального положения B на две клетки, что записывается так:

$$B^1 \cdot B^1 = B^{1+1} = B^2.$$

Если же шашка из клетки B передвинулась вправо на две клетки, а затем обратно влево на две клетки, то она приходит к первоначальной клетке, что обозначается так:

$$B^2 \cdot B^{-2} = B^{2+(-2)} = B^0 = 1.$$

Вместо «одна клетка вправо или влево и опять одна клетка вправо или влево» пишут: $(B+B^{-1})^2$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получаем:

$$B^2 + B^{-2} + 2B^1 \cdot B^{-1} = B^2 + B^{-2} + B^0 + B^0 = B^2 + B^{-2} + 2,$$

а это указывает на то, что вследствие вышеуказанных движений возможны три следующих результата:

1) или шашка окажется на две клетки правее B (в том случае, конечно, когда она дважды двигалась вправо);

2) или она окажется на две клетки левее B (если дважды двигалась влево);

3) или же останется в B (если двигалась один раз вправо, а другой влево, или наоборот — влево, а затем — вправо).

Огромное распространение получили в настоящее время замечательные книги Я. И. Перельмана («Занимательная арифметика», «Занимательная алгебра», «Занимательная геометрия», «Живая математика», «Занимательные задачи») и Б. А. Кордемского («Удивительный квадрат», «Математическая смекалка», «Очерки о математических задачах на смекалку»).

* *

*

Известно, что религия — источник многих суеверий. Церковники не пренебрегают никакими средствами, для того чтобы отравлять людей религиозным дурманом.

В этой связи интересно привести такой пример. В одной из масонских[1] книг говорится о следующем «таинственном» свойстве треугольника (рис. 95): если при вершинах треугольника поставить произвольные числа, например, 3, 5, 7, затем сложить эти числа попарно и ре-

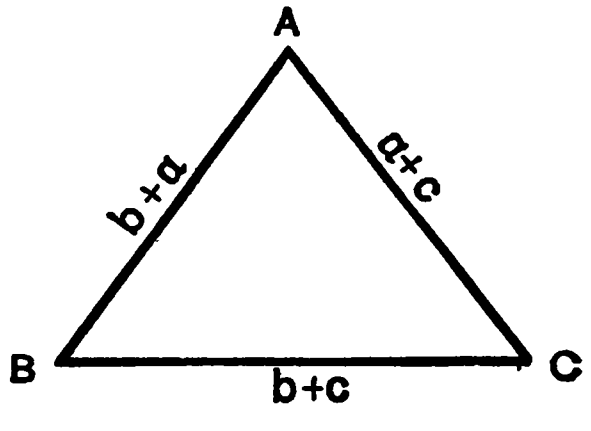


Рис. 95.

[1] Масонство — религиозно-философское течение, возникшее в XVIII в. в Англии и затем распорстранившееся в других странах в виде тайных обществ, насаждавших реакционные взгляды, мистику и суеверия.

зультаты (8, 12, 10) поставить на сторонах, соединяющих вершины, при которых стоят пары, то, складывая число при каждой вершине с числом на противоположной стороне, мы получим один и тот же результат (15).

Легко понять, что речь идет не о каком-либо «таинственном» свойстве треугольника, а о известных всем учащимся сочетательном и переместительном свойствах сложения:

$$a+(b+c)=b+(c+a)=c+(a+b)=a+b+c.$$

§ 11. АЛГЕБРА В ДРЕВНЕЙ ИНДИИ И КИТАЕ

В VII книге трактата «Математика в девяти книгах», озаглавленной «Избыток — недостаток», изложены два метода решения задач, сводящихся к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными. С первым из них мы уже познакомились (см. гл. 5, § 9). Второй метод, получивший распространение в средние века, был назван «методом двух ложных положений». В нем, в отличие от более простого метода одного «ложного положения» (см. гл. 1, § 1; 6), неизвестному приписываются последовательно два отличных от истинного значения.

Приведем одну задачу из VII книги «Математики», решаемую методом двух ложных положений.

Задача 32. «Имеется 9 слитков золота и 11 слитков серебра, их взвесили, вес как раз совпал. Переложили слиток золота и слиток серебра, золото стало легче на 13 ланов. Спрашивается, каков вес слитка золота и слитка серебра, каждого в отдельности».

В настоящее время, обозначая вес, а вернее, массу[1] одного слитка золота через x, серебра — через y, мы свели бы задачу к решению следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 9x = 11y \\ 8x + y + 13 = 10y + x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 9x - 11y = 0, \\ 7x - 9y + 13 = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

откуда:

$$x = 35\,\frac{3}{4} \text{ лан}, \qquad y = 29\,\frac{1}{4} \text{ лан}.$$

Этот ответ дается в тексте следующим образом: «вес слитка золота 2 цзиня 3 лана 18 чжу, вес слитка серебра 1 цзинь 13 ланов 6 чжу». Следует учесть, что: 1 цзинь=16 ланам, 1 лан= =24 чжу.

Для решения задачи автор, ведущий вычисления на счетной доске, излагает правило, из которого можно заключить, что сущность решения сводится к следующему. Предположим в пер-

---

[1] См. сноску на с. 38.

вый раз (первое ложное положение) вес слитка золота $x_1 = 3$ цзиням, тогда вес слитка серебра y_1 будет равен

$$y_1 = \frac{9}{11}, \quad x_1 = \frac{9 \cdot 3}{11} = 2\ \frac{5}{11}\ \text{цзиня.}$$

Согласно условию задачи мы должны были бы иметь «равенство»:

$$10 \cdot 2\ \frac{5}{11} + 3\ (\text{цзиня}) = 8 \cdot 3 + 2\ \frac{5}{11} + \frac{13}{16}\ (\text{цзиня}),$$

однако для равенства в правой части недостает слагаемого $\frac{49}{11 \cdot 16}$.

Число $x_1 = 49$ названо вычислителем[1] «недостатком в правой строке».

Во второй раз предположим (второе ложное положение), что вес слитка золота $x_2 = 2$ цзиням[2], тогда $y_2 = 1\frac{7}{11}$. И на сей раз равенство, которое должно было бы иметь место по условию задачи,

$$8 \cdot 2 + 1\ \frac{7}{11} + \frac{18}{16} = 10 \cdot 1\ \frac{7}{11} + 2$$

неверно. Действительно, левая часть больше правой на $\frac{15}{11 \cdot 16}$.

Число $k_2 = 15$ названо «избытком в левой строке».

Далее предполагается составление таблицы

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

и указывается словесно следующее правило для нахождения истинного значения x, которое в нашей символике выражается так:

$$x = \frac{k_1 x_2 + k_2 x_1}{k_1 + k_2}. \qquad (2)$$

В данном случае получаем:

$$x = \frac{49 \cdot 2 + 15 \cdot 3}{49 + 15} = \frac{143}{64} = 2\ \frac{15}{64}\ (\text{цзиня}) = 2\ \text{цзиня}\ 3\ \text{лана}\ 18\ \text{чжу}.$$

(Итак, истинное значение x содержится в данном случае между обеими нормами: $x_2 < x < x_1$). Затем определяется вес слитка серебра:

$$y = \frac{x}{\frac{11}{9}} = \frac{143}{\frac{11}{9} \cdot 64} = 1\ \frac{53}{64}\ \text{цзиня} = 1\ \text{цзинь}\ 13\ \text{ланов}\ 6\ \text{чжу}.$$

[1] Общие знаменатели на счетной доске не выкладывались.

[2] Приписываемые неизвестному значения x_1 и x_2 названы в трактате «нормами».

В арабскую литературу алгоритм ложного положения проник под названием «правила двух ошибок». Вот как решал, например, ал-Хорезми задачу № **64**. Если бы искомое число равнялось 12, то остаток равнялся бы:

$$12 - \frac{1}{3} \cdot 12 - \frac{1}{4} \cdot 12 = 5,$$

то есть на 3 меньше 8. Если же предположить, что неизвестное равно 24, то остаток будет равен:

$$24 - \frac{1}{3} \cdot 24 - \frac{1}{4} \cdot 24 = 10,$$

то есть на 2 больше 8.

Согласно правилу двух ложных положений, ал-Хорезми находит истинное значение неизвестного

$$x = \frac{3 \cdot 24 + 2 \cdot 12}{3 + 2} = 19\,\frac{1}{5}.$$

О «правиле двух ошибок» писали на арабском языке специальные сочинения, в которых рассматривали и те случаи, когда истинное значение неизвестного x не содержится между «нормами» x_1 и x_2, иначе говоря, когда оба предположения приводят к «избыткам» или оба — к «недостаткам». В таких случаях в формуле (2) следует, учитывая знаки, брать в числителе не сумму, а разность указанных произведений, в знаменателе же — разность «избытков» или «недостатков».

Из арабской литературы «правило» перешло в XII в. в европейскую математическую литературу, где впоследствии играло важную роль вплоть до XVIII в. Леонардо Фибоначчи посвятил ему целую главу в своей «Книге абака», в которой впервые встречаются слова «минус» и «плюс», однако не в смысле действий, вычитания и сложения, а именно в смысле «недостатка» и «избытка». Наряду со словесным доказательством формулы (2), Фибоначчи, не пользовавшийся отрицательными числами, доказывает «правило» для случаев двух ошибок с избытком и двух ошибок с недостатком.

В латинских математических сочинениях средневековья правило получило название *regula duorum falsorum* («правило двух фальшивых»). Отсюда название «фальшивое правило», встречаемое в старых русских руководствах.

Приведем, например, следующую задачу и ее решение из «Арифметики» Л. Магницкого.

З а д а ч а **33.** «Вопросил некто некоего учителя, сколько имеешь учеников у себя, так как хочу отдать сына к тебе в учение. Учитель ответил: если ко мне придет учеников еще столько же, сколько имею и полстолько и четвертая часть и твой сын, тогда будет у меня учеников 100. Сколько было у учителя учеников?»

Первое ложное положение: $x_1=24$, т. е. учеников 24; тогда выражение

$$24+24+\frac{1}{2}\cdot 24+\frac{1}{4}\cdot 24+1$$

дает не 100, по условию задачи, а 67, т. е. первая погрешность

$$k_1=100-67=33.$$

Второе ложное положение $x_2=32$, тогда:

$$32+32+\frac{1}{2}\cdot 32\cdot\frac{1}{4}\cdot 32+1=89,$$

то есть вторая погрешность $k_2=100-89=11$.

Правило Магницкого для нахождения истинного значения соответствует формуле:

$$x=\frac{k_1x_2-k_2x_1}{k_1-k_2}. \qquad (2^1)$$

Итак,

$$x=\frac{33\cdot 32-11\cdot 24}{33-11}=36.$$

Такой же формулой следует пользоваться, если при обоих ложных положениях получаются числа больше, чем 100, например, при $x_1=52$, $x_2=40$

имеем

$$x=\frac{44\cdot 40-11\cdot 52}{44-11}=36.$$

Если же при одном положении получим больше, а при другом меньше, чем сто, то нужно в числителе и знаменателе (2^1) брать не разности, а суммы.

Пример: при $x_1=60$ $\quad k_1=-66$,

$x_2=20$ $\quad k_2=44$,

$$x=\frac{66\cdot 20+60\cdot 44}{66+44}=36.$$

Правило двух ложных положений легко объяснить алгебраически.

Пусть требуется решить уравнение

$$ax+b=c. \qquad (3)$$

Ложное положение даст

$$ax_1+b=c_1, \qquad (4)$$

$$ax_2+b=c_2. \qquad (5)$$

Вычитая последовательно (4) и (5) из (3), получим:

$$a(x-x_1)=c-c_1=k_1, \tag{6}$$

$$a\ (x-x_2)=c-c_2=k_2, \tag{7}$$

k_1, k_2 и являются соответствующими «ошибками», «погрешностями».

Разделив почленно (6) на (7), получим:

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{k_1}{k_2}. \tag{8}$$

Решая это уравнение относительно x, получим формулу (2^1). Формулу (2^1) можно применять во всех случаях, о которых говорилось выше, если k_1 и k_2 считать положительными в первом, отрицательными — во втором, k_1 отрицательным, а k_2 — положительным — в третьем случае.

Конечно, в настоящее время уравнение (3) решается просто. Но такое общее решение оперирует как с положительными, так и с отрицательными числами. Именно желание не пользоваться средствами алгебры, в частности недоверие к отрицательным числам, непризнание их и желание избегать их привело к тому, что еще в XVIII в. простые задачи тоже решались громоздким и искусственным «фальшивым правилом», хотя само это правило возникло из решения более «замысловатых» задач.

Правило ложного положения называли в средние века также «правилом весов»[1], так как оно давало механический способ его применения с помощью рисунка 96.

Вот как звучало при этом «правило»: «Рисуй весы и пиши над точкой опоры результат, который получается после указанных в задаче действий над неизвестным числом. Оба ложных положения пиши над чашками весов, погрешности «больше» пиши под весами, «меньше» — над весами. Ложные положения и погрешности умножить накрест. Бери разности произведений, если погрешности находятся по одну сторону от весов, бери их суммы, если погрешности стоят по разные стороны».

Метод двух ложных положений, с помощью которого получают точ-

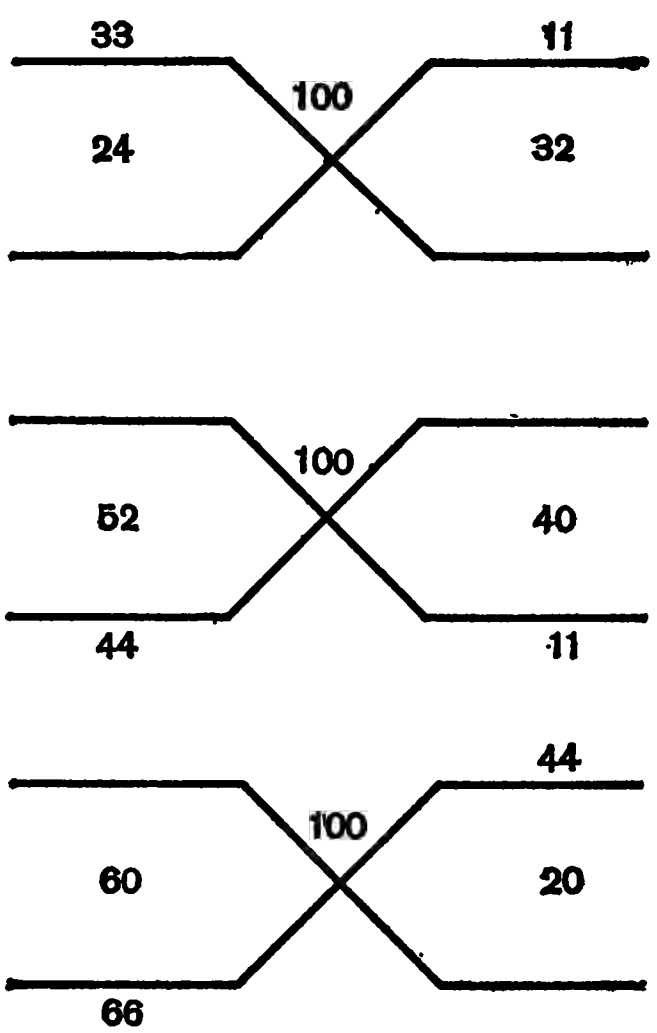


Рис. 96. Правило весов.

[1] Название «правило чаш весов» встречается впервые в арабском сочинении «Краткое изложение арифметических действий» ибн ал-Банны (XIII—XVI вв.).

ное решение линейных задач, можно использовать для приближенного решения задач, сводящихся к уравнениям высших степеней. Его использовали в своей вычислительной работе знаменитый александрийский астроном Птолемей (II в.), немецкий математик Варфоломей Питиск (1561—1613), автор популярных в XVII в. тригонометрических таблиц, и другие ученые.

* *
*

Индийские математики не создали единого алгорима решения системы линейных уравнений со многими неизвестными. Соответствующие задачи они решали разными искусственными приемами, напоминающими решения Диофанта (см. зад. 109).

Однако в свободном оперировании отрицательными и иррациональными числами, в обобщении правил решения квадратных уравнений и особенно в области алгебраической символики индийские математики значительно опередили китайских.

Брахмагупта называл «неизвестное «йават-тават», то есть «столько-сколько» в смысле «количество». Вот таблица (табл. 8) терминов и их сокращений (символов) в русской транскрипции работ Брахмагупты:

Таблица 8

Термин	Символ	Значение
Рупа	«Ру»	Свободный член
Йават-тават	«Йа»	Первая неизвестная
Калака (черный)	«Ка»	Вторая неизвестная
Нилака (голубой)	«Ни»	Третья неизвестная
Питака (желтый)	«Пи»	Четвертая неизвестная
Панду (белый)	«Па»	Пятая неизвестная
Лохита (красный)	«Ло»	Шестая неизвестная

Обе части уравнения Брахмагупта писал одну под другой, что заменяло отсутствовавший знак равенства. Совершенно особо выделяется символика, применяемая в Бахшалийской рукописи (гл. 5 § 7; 5), в которой неизвестная названа «сунья» и обозначается точкой. Знаком равенства служит и слог «пха» (от слова «пха-лам» — равный), знаком сложения — «иу», деления — «бха», вычитания — вроде знака + (ставится после вычитаемого), деления — ⟷ (ставится после делителя). Неизвестные обозначаются сокращенными порядковыми числительными:

1-е неизвестное — «пра» (от «пратама» — первый),
2-е неизвестное — «дви» (от «двития» — второй),
3-е неизвестное — «тр» (от «трития» — третий) и т. д.

Современные записи и решения уравнений восходят к XVIII в. При решении уравнений первым появился способ сложения, а затем способ подстановки и сравнения. Во «Всеобщей арифметике» Ньютона встречаются уже все способы, ныне применяемые в школе.

§ 12. АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА В ЕВРОПЕ В XII—XV ВВ.

В XII—XV вв. математики Европы в основном усваивали знания, позаимствованные из науки стран ислама, Древней Греции и Индии. Однако и в этот период некоторые европейские математики своими трудами содействовали известному сдвигу в развитии науки. Вспомним, например, о Леонардо Фибоначчи (Пизанском) и его «Книге абака» (см. гл. 1 § 2; 21).

Современником Леонардо Пизанского был механик и математик Иордан Неморарии, уроженец Германии, живший некоторое время во Франции. Он был автором ряда книг по математике. Его алгебраическое сочинение, названное «О данных числах», содержит 115 задач на уравнения и системы уравнений 1-й и 2-й степеней. Неизвестное Неморарий называет «числом», а известные — «данными числами». Знака для неизвестного, как и знаков действий, у него нет. Важнейшей особенностью алгебры Немория является то, что в ней используются буквы для обозначения чисел вообще. Однако над буквами автор не производит никаких действий. Вот почему его нельзя считать основателем нашей алгебраической символики.

В XIV в. видными математиками и мыслителями были Томас Брадвардин в Англии, Николай Орем во Франции. Последний является автором замечательных произведений, в том числе: 1) «О конфигурации качеств», в котором[1], по выражению проф. А. П. Юшкевича, содержатся «прообразы идей функциональной зависимости и ее графического изображения»; 2) «Алгоризм пропорций», посвященный теории отношений. В этой книге Орем обобщает действие возведения в степень на положительные и дробные показатели.

Со второй половицы XV в. (а в Италии с XIV в.) начинается в Западной и Центральной Европе эпоха Возрождения, характеризующаяся большим подъемом науки, литературы и искусства. Подъем был связан с значительным развитием товарного производства средневековых городов и зарождением капиталистических отношений. В XIII—XIV вв. Италия была экономически наиболее развитой страной Европы. В XIV—XVI вв. в ней достигли наибольшего расцвета литература, живопись, скульптура, архи-

[1] Перевод трактата Орема с примечаниями и статьей В. П. Зубова, см. Историко-математические исследования. М., 1958, вып. XI, с. 601—731.

тектура и наука. Больше, чем в других странах, здесь в центре древней цивилизации сохранились сотни памятников античности и проявилась тяга к возрождению философско-научного и литературного наследия, а также искусства древности. Наряду с другими произведениями, переводятся с греческого языка труды Архимеда, Птолемея, Евклида.

Во второй половине XV в. и в начале XVI в. ярко проявился гений художника Леонардо да Винчи, который одновременно был и выдающимся ученым, инженером, архитектором, физиком, математиком. В это же время большой популярностью пользовался в Италии Лука Пачоли, автор небольшой математической энциклопедии, изданной в Венеции в 1494 г. под названием «Сумма (знаний) по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности». В этой книге, написанной на итальянском языке, излагаются правила и приемы арифметических действий над целыми и дробными числами, тройное правило, пропорции, задачи на сложные проценты, правила двойной бухгалтерии и другие сведения, удовлетворявшие потребности коммерческой жизни того времени. В ней даются также правила решения линейных, квадратных и некоторых видов биквадратных уравнений. Классификация уравнений у Пачоли, по существу, та же, что у ал-Хорезми. Он рассматривает три вида «сложных», т. е. полных квадратных уравнений:

$$x^2+px=q;\ \ px+q=x^2;\ \ x^2+q=px.$$

Эта классификация, вызванная, как мы уже знаем, отсутствием понятия самостоятельного отрицательного числа, встречается почти во всех алгебраических сочинениях той эпохи.

В 1461 г. была написана первая дошедшая до нас немецкая алгебра. Ее автор — ученый монах Фридерикус Герхард из Регенсбурга, черпал свои знания из работ ал-Хорезми, Фибоначчи, Орема и др. Фридерикус, как и все его современники, рассматривает 6 типов линейных и квадратных уравнений. Однако он приводит пример и «вне шести правил»:

З а д а ч а. Решить уравнение:

$$x+\sqrt{x^2-x}=2.$$

Этапы решения таковы:

$$\sqrt{x^2-x}=2-x,$$

$$x^2-x=4+x^2-4x,$$

$$x^2+3x=x^2+4,$$

$$3x=4,$$

$$x=1\frac{1}{3}.$$

Символы при этом не применяются. Неизвестное названо «корень»[1] (подразумевается от x^2, названное census[2], zensus), а также «cosa». Свободный член назван «число» или «драхма» (денежная единица)[3].

В 1481 г. Ян Видман прочитал первую в Лейпцигском университете лекцию по алгебре.

Замечательным произведением XV в. является труд французского ученого Николая Шюке: «Наука о числах в трех частях». Эта книга, написанная в 1484 г. на французском языке, содержит правила действий с рациональными числами и с корнями, а также учение об уравнениях. Его изложение основ алгебры отличается от предшествующих большей общностью и ясностью. В его книге впервые встречаются термины: «биллион», «триллион», «квадриллион», «ниниллион». В труде Шюке, как и в произведениях других математиков той эпохи, встречаются зачатки символической алгебры.

Большое значение для дальнейшего развития техники вычисления имело введение десятичных дробей. Официальным годом «открытия» десятичных дробей в Европе считают, как известно, 1585 год, когда была опубликована на фламандском и французском языках брошюра С. Стевина «Десятая, обучающая легко производить все расчеты, встречающиеся в людских делах, с помощью целых чисел, без дробей». Однако некоторые намеки на десятичные дроби появляются в трудах европейских ученых еще в XII в. Известно, что одной из предпосылок введения десятичных дробей в Европе было систематическое пользование в науке шестидесятеричными дробями. При некоторых действиях с дробями Иоан Севильский из Испании в XII в., Иоганн из Гмундена (Австрия) в XIV в. и другие ученые прибегают то к шестидесятеричной, то к десятичной системе. При извлечении квадратных корней, которые нацело не извлекаются, они приписывают к подкоренному десятичному числу четное число нулей для получения приближенного значения с несколькими знаками. Например, вместо $\sqrt{93}$ берется $\sqrt{930\,000}$, полученное же число 964 делят на 100 и обращают в шестидесятеричную дробь.

Примерно так же действовал астроном и математик Георг Пейербах в первой половине XV в. Его ученик Иоганн Моллер, известный в математике под именем Регионтан, составил первые, чисто десятичные, тригонометрические таблицы. Еще дальше пошел Виет, писавший иногда в своих тригонометрических таблицах числитель десятичной дроби без знаменателя, например, 5/73652 вместо нашего 5,73652. Первую попытку систематического изложения учения о десятичных дробях сделал во второй половине XIV в. Иммануил Бонфис из Тараскона (Южная Франция), однако его трактат «Путь деления» не получил рас-

[1] У ал-Хорезми — «джизр».
[2] У ал-Хорезми — мал.
[3] У ал-Хорезми — дирхем.

пространения. В XV—XVI вв. дроби с десятичными знаменателями все чаще встречаются в трудах европейских математиков. Назрела потребность в едином, полном и систематическом изложении учения о десятичных дробях. Эту роль мастерски выполнил Симон Стевин (см. гл. 1, § 2).

§ 13. АРХИМЕД

Величайшим математиком и физиком древности был Архимед (287—212 гг. до н. э.). Он родился в Сиракузах (Сицилия). Отец его, астроном Фидий, был близок к кругам сиракузского двора и, как полагают, состоял в родственных отношениях с царем Гиероном. Первоначально Архимед работал преимущественно в качестве инженера-механика и занимался в основном конструированием военных машин и строительством укреплений, необходимых для обороны родины. Некоторое время Архимед жил в Александрии, где он общался с видными учеными, среди которых был математик и географ Эратосфен и астроном Конон. Вернувшись на родину, Архимед написал ряд выдающихся произведений по математике и механике.

Вокруг Архимеда, его жизни и научной деятельности, было создано много легенд. Рассказы о жизни Архимеда содержатся у древних историков Полибия (II в. до н. э.) и Тита Ливия (I в. до н. э.), у писателей Цицерона (I в. до н. э.), Плутарха (I—II вв.) и др. Вот некоторые из этих рассказов.

Архимед всегда так сильно увлекался наукой, что его приходилось силою отрывать от рабочего места к столу или насильственно уводить в баню, где он продолжал размышлять над геометрическими фигурами, которые он пальцем чертил на намыленном теле.

Царь Гиерон заказал мастеру корону из чистого золота. Когда заказ был выполнен, царь хотел проверить, не подменил ли мастер часть данного ему золота серебром и обратился по этому поводу к Архимеду. Архимед не смог сразу решить поставленную перед ним задачу. Но однажды, когда мылся в бане, он, погружаясь в воду, был внезапно озарен мыслью о правильном решении и до того был охвачен радостью своего открытия, что выбежал на улицу голым с криком: «Эврика! Эврика!» (Я нашел!) Так был открыт знаменитый «закон Архимеда»...

Царь Гиерон построил в подарок египетскому царю Птолемею огромный и роскошный корабль, но людям царя было не под силу спустить этот корабль на воду. Архимед построил машину, с помощью которой один только человек, сам царь, спустил корабль на воду. После этого царь воскликнул: «Отныне, что бы ни сказал наш Архимед, мы будем считать правдой». Разработав теорию рычага, Архимед сам сказал: «Дайте мне место, где стоять, и я сдвину Землю».

После смерти Гиерона, во время второй Пунической войны, Архимед мастерски организовал оборону родных Сиракуз, при осаде их в 212 году до н. э. римлянами, которыми командовал полководец Марцелл. Вот что пишет об этой обороне Полибий:

«Римляне не приняли в расчет искусства Архимеда, не догадались, что иногда дарование одного человека способно сделать больше, чем огромное множество рук. Теперь они убедились в этом по опыту... Архимед заготовил внутри города, а равно и против нападающих с моря, такие средства обороны, что защитникам не было нужды утруждать себя непредусмотренными работами на случай неожиданных способов нападения: у них заранее готово было все к отражению врага во всяких случаях... Архимед соорудил машины, приспособив их к метанию снарядов на любое расстояние. Так, если неприятель подплывал издали, то Архимед поражал его из дальнобойных камнеметальниц тяжелыми снарядами или стрелами и ставил неприятеля в трудное и беспомощное положение. Когда же снаряды начинали летать поверх неприятеля, то Архимед употреблял меньшие машины, каждый раз сообразуясь с расстоянием, и наводил на римлян такой ужас, что они никак не решались идти на приступ или приблизиться на судах... Итак, римляне оставались под стенами города в течение восьми месяцев и не было такой уловки или отважного дела, перед которым они остановились бы, но на приступ идти они уже ни разу не осмеливались. Такова чудесная сила одного человека, одного дарования, умело направленного на какое-либо дело. Вот и теперь, располагая столь значительными сухопутными и морскими силами, римляне могли бы быстро овладеть городом, если бы кто-либо изъял из среды сиракузян одного старца. Но так как этот один среди сиракузян, то римляне не дерзали нападать на город или по крайней мере употреблять те способы нападения, отразить которые был не в силах Архимед».

А вот что рассказывает Плутарх:

«Когда корабли Марцелла приблизились на расстояние полета стрелы, то старик (Архимед) велел приблизить шестигранное зеркало, сделанное им. На известном расстоянии от этого зеркала он поместил другие зеркала поменьше, такого же вида. Эти зеркала вращались на своих шарнирах при помощи квадратных пластинок. Затем он устанавливал свое зеркало среди лучей солнца летом и зимой. Лучи, отраженные от этих зеркал, произвели страшный пожар на кораблях, которые были превращены в пепел на расстоянии, равном полету стрелы».

Все же после одного большого праздника, воспользовавшись отсутствием должной бдительности со стороны сиракузян, римлянам удалось ворваться в город и устроить чудовищный разгром его.

Седой 75-летний Архимед сидел и напряженно размышлял над начертанными на песке геометрическими фигурами, когда

к нему ворвался римский солдат и бросился на него с мечом. Архимед просил его подождать немного, пока он закончит задачу, но солдат, которому не было дела до науки, убил его. Последние слова Архимеда были: «Не трогай мои круги!»... Плутарх сообщает, что Марцелл крайне жалел о смерти Архимеда, и пишет далее: «Архимед имел возвышенную душу и глубокий ум. Он, как рассказывают, будучи околдован геометрией, как какой-то домашней сиреной, забывал о пище и пренебрегал заботами о своем теле... Таков был Архимед, который благодаря своим глубоким познаниям в механике, смог, насколько это от него зависело, сохранить от поражения и себя самого и свой город».

По поводу вышеприведенных рассказов надо сказать следующее. Полибий известен как серьезный историк, писавший сравнительно немного позже описываемых им событий. Материал, изложенный им, считается в основном исторически достоверным. А материал, содержащийся в красочных, но тенденциозных рассказах Плутарха, нельзя считать исторической истиной. Так, в настоящее время физики отвергают возможность сжигать с помощью зеркал вражеский флот, считая вышеприведенный рассказ Плутарха простой легендой. Трудно поверить и тому, что для Архимеда, организатора и вдохновителя обороны Сиракуз, занятие города римлянами оказалось неожиданностью, что привело его к смерти во время доказательства теоремы. Дело в том, что Плутарх, живший в I—II вв. до н. э., был сторонником Римской империи, всячески старался обелить Рим и, в частности, Марцелла. Он намеренно затушевал истинные обстоятельства смерти великого ученого и патриота Архимеда.

До нас дошли следующие произведения Архимеда:

1. *Квадратура параболы* — в нем Архимед находит площадь сегмента параболы.

2. *О шаре и цилиндре.* Здесь публикуются впервые полученные оригинальные результаты относительно объема шара и цилиндра.

3. *О спиралях.* Архимед определяет спираль, как линию, описываемую точкой, равномерно движущейся по прямой, в свою очередь равномерно вращающейся вокруг одной своей точки.

4. *О коноидах и сфероидах.* «Коноид» — конусовидное тело, так называет Архимед параболоид и гиперболоид вращения. «Сфероид» — сферовидное тело, эллипсоид вращения.

5. *О равновесии плоских фигур.* Архимед здесь доказывает, что центром тяжести треугольника является точка пересечения его медиан, находит центр тяжести параллелограмма, трапеции и параболического сегмента, излагает доказательство закона равновесия рычага.

6. *Эфод* (или «Метод»). В этом сочетании вновь выводятся некоторые теоремы, доказанные в работе «О шаре и цилиндре», находятся объемы тел и пр.

7. *О плавающих телах.* Здесь, среди других, формулируется «Закон Архимеда».

8. *Измерение круга.* Это — одно из наиболее известных произведений Архимеда, от которого, однако, до нас дошел лишь небольшой отрывок. В последнем излагаются доказательства следующих трех предложений:

а) Площадь круга равна площади прямоугольного треугольника с основанием, равным окружности, и с высотой, равной радиусу;

б) Отношение между площадью круга и квадратом, построенным на его диаметре, равно 11:14;

в) Отношение любой окружности к ее диаметру меньше $3\frac{1}{7}$ и больше $3\frac{10}{71}$.

9. *Псаммит* (исчисление песчинок). В этой работе Архимед, желая расширить систему счисления, исходит из греческой мириады — числа, равного 10^4 и кладет в основу *октаду,* то есть мириаду мириад — 10^8. Считая все числа до 10^8 «первыми», он считает октаду единицей «вторых чисел», $(10^8)^2$ — единицей «третьих чисел» и т. д. до $(10^8)^{10}$, которым заканчивается «первый период». Аналогично идет второй период и следующие до 10^8 периода. Этот счет окатадами он доводит до числа $(10^8 \cdot 10^8)\ 10^8$, которое в нашей нумерации записывается как 1 с 80 000 миллионами нулей. Чтобы написать его полностью, требуется место, в 500 раз большее расстояния от Земли до Солнца.

Пользуясь затем некоторыми астрономическими методами Аристарха Самосского, творца гелиоцентрической системы мира в древности, Архимед находит, что число песчинок Вселенной не больше тысячи мириад «восьмых чисел», т. е. числа $1\,000 \cdot 10^4 \times \times 10^{8 \cdot 7} = 10^{63}$.

Таким образом, в отличие от Евклида, Архимед проявляет большой интерес к вопросам измерения, вычисления и численного решения задач. Он развивал наряду с теоретической математикой и практическую, прикладную науку, применяя математику к физике, механике и астрономии. Механику он поднял до такого уровня, которого она не могла превзойти на протяжении 19 веков, до Галилея. Архимед был творцом науки, открывал новые истины, создавал теории.

Из математических открытий Архимеда особое значение имеют вычисление длин кривых, площадей и объемов фигур посредством методов, которые предвосхитили анализ бесконечно малых. Творчество Архимеда имело, таким образом, большое значение для создания (через два тысячелетия) интегрального и дифференциального исчислений. Недаром еще в начале XVIII в. Лейбниц писал: «Кто погружается в сочинения Архимеда, тот меньше удивляется новым открытиям»...

Глава 9.
ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

§ 14. АРИФМЕТИКА

1. Целые числа

34. Перед вами картина «Устный счет» художника Н. П. Богданова-Бельского (1868—1945). На ней изображен урок арифметики в сельской школе XIX в., в которой преподавал профессор С. А. Рачинский, покинувший университетскую кафедру, чтобы стать народным учителем. На классной доске (рис. 97) записана следующая задача [1]:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

Решите ее устно!

35. Величайший математик древности Архимед погиб в возрасте 75 лет во время осады Сиракуз в 212 г. до н. э. Определить год рождения Архимеда.

36. Зная содержание предыдущей задачи, определить, сколько лет тому назад родился Архимед.

37. Великий русский математик Н. И. Лобачевский родился в XVIII в. и прожил 64 года, из них 56 лет в XIX в. Найти годы рождения и смерти Лобачевского.

38. *Задача из папируса Ахмеса:* «У семи человек по семи кошек, каждая кошка съедает по 7 мышей, каждая мышь съедает по 7 колосьев, из каждого колоса может вырасти по 7 мер зерна. Как велики числа этого ряда и их сумма?».

39. Предыдущей задаче соответствует следующая *русская народная задача:*

«Шли 7 старцев, у каждого старца по 7 костылей, на каждом костыле по 7 сучков, на каждом сучке по 7 кошелей, в каждом кошеле по 7 пирогов, в каждом пироге по 7 воробьев. Сколько всех?»

40. *Задача Алькуина:* «Собака гонится за кроликом, находящимся в 150 футах от нее. Она делает прыжок в 9 футов каждый раз, когда кролик прыгает на 7 футов. Сколько прыжков должна сделать собака, чтобы догнать кролика?»

---

[1] Подробнее о задаче С. А. Рачинского см.: Подашов А. П. Вопросы внеклассной работы по математике в школе. М., 1962. с. 107—110.

41. *Из русской рукописи* XVII в.: «Юноша некий пошел из Москвы к Вологде и идет он всякий день по 40 верст. А другой пошел после него на следующий день, а на всякий день идет по 45 верст. Ино в сколько дней тот юноша постиг прежнего юношу, сочти ми».

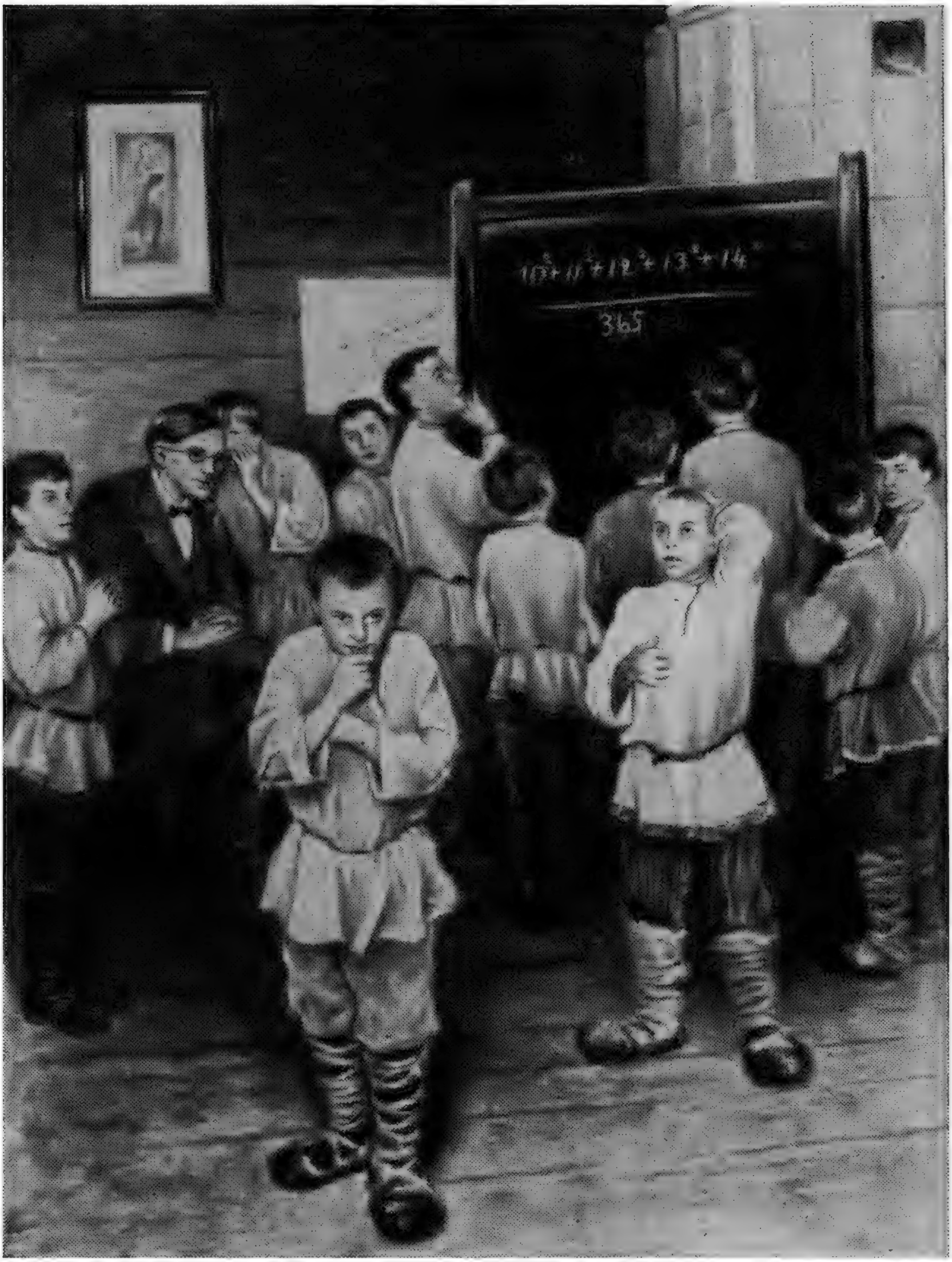


Рис. 97. Устный счет. С картины Богданова-Бельского.

42. Прочитать числа 10, 12, 100, 341, 400, записанные в пятеричной системе счисления.

43. Прочитать числа 10, 100, 1000, 10 000, 1010, 11001, записанные в двоичной системе счисления.

44. Знаменитый немецкий математик К. Гаусс (1777—1855) еще в детстве обнаружил выдающиеся способности. Однажды в школе учитель предложил следующую задачу: Сложить все натуральные числа[1] от 1 до 100. Не прошло и минуты, как маленький Гаусс дал ответ: 5050. Когда его спросили, как он решил задачу, Гаусс разъяснил: каждая пара чисел, которые одинаково отстоят от концов ряда (например: 1 и 100; 2 и 99; 3 и 98; 4 и 97 и т. д.) составляют в сумме 101, а так как таких пар 50, то нужно умножить 101 на 50.

Найти таким же способом сумму всех натуральных чисел: а) От 1 до 120; б) от 1 до 230; в) от 1 до n.

45. Пифагору приписывается следующее открытие: сумма любого числа последовательных нечетных чисел, начиная с единицы, есть точный квадрат. Проверьте это положение устно для суммы первых девяти нечетных чисел ($1=1^2$, $1+3=4=2^2$, ...)

46. Пифагору приписывается также следующее открытие: Всякое нечетное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов. Проверьте это для всех нечетных чисел от 3 до 15.

47. *Из «Арифметики» таджикского ученого X—XI вв. Ибн-Сина* (латинизировано: Авиценна): «Если число, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого, деленный на 9, даст в остатке 1». Проверьте это свойство для нескольких чисел.

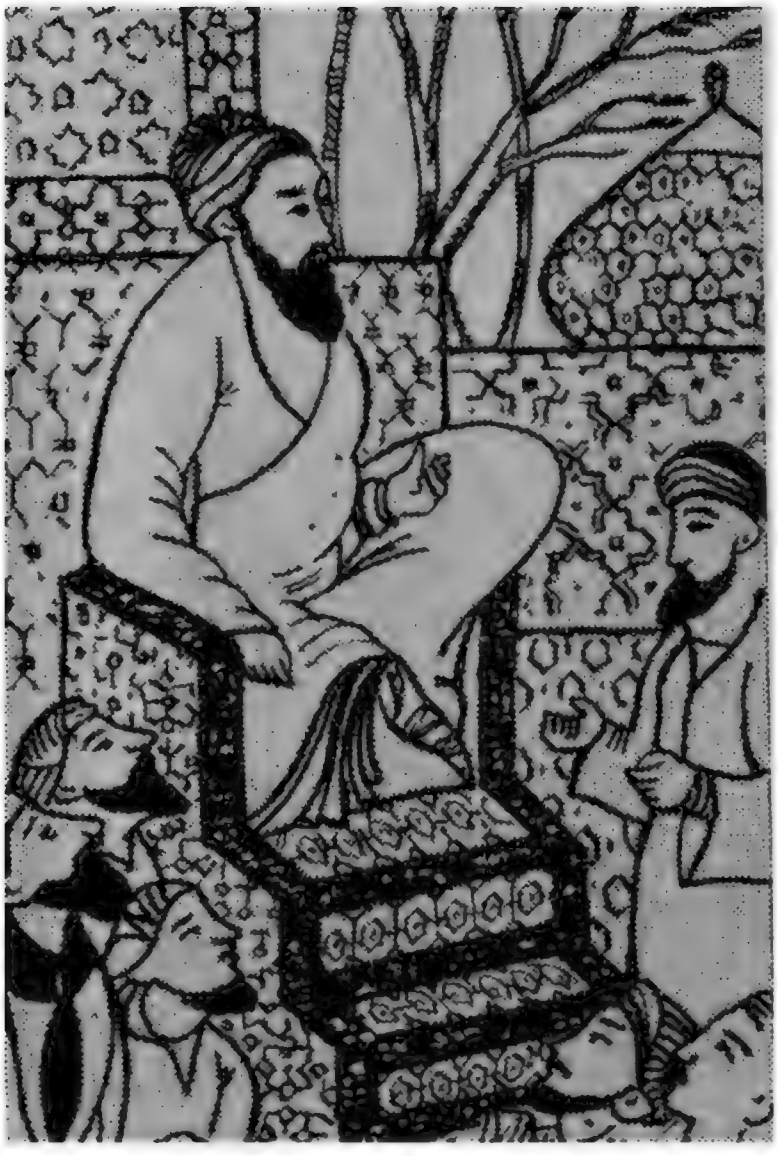


Рис. 98. Ибн-Сина (Авиценна) с учениками. Репродукция персидской миниатюры XVII в.

48. На одной из египетских пирамид иероглифами написано число 2520. Проверьте, что оно является наименьшим общим кратным всех целых чисел от 1 до 10.

49. *Древнекитайская задача.* «В клетке находится неизвестное число фазанов и кроликов. Известно, что вся клетка содержит 35 голов и 94 ноги. Узнать число фазанов и число кроликов.»

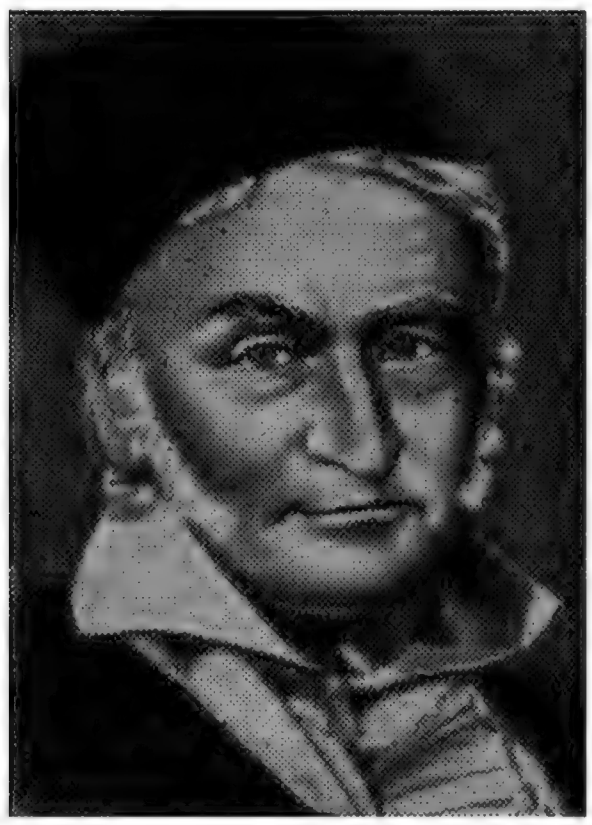
50. *Древнеиндийская задача.* «Найти число, которое, бу-

[1] По некоторым другим источникам — до 40, до 50 или до 60.

дучи умножено на 3, затем разделено на 5, увеличено на 6, после чего, если из него извлекается квадратный корень, отнимается единица и возводится в квадрат, дает 4».

51. В одном из сборников задач XVI в. говорится о следующем свойстве простых чисел: «любое простое число, начиная с 7, либо при делении на 6 дает в остатке 1, либо при сложении с 1 кратно 6». Проверьте это свойство для всех простых чисел от 7 до 41.

52. Великий русский математик П. Л. Чебышев доказал, что между любым натуральным числом n (кроме 1) и удвоенным $2n$ всегда находится по меньшей мере одно простое число [1]. Например, между 2 и 4 находится простое число 3. Проверьте это свойство для всех натуральных чисел от 3 до 20.



К. Ф. Гаусс.

53. Ферма считал, что для любого натурального числа n число $F_n=2^{2^n}+1$ простое. Лишь в 1732 г. это предложение было опровергнуто Л. Эйлером, доказавшим, что число $F_5=2^{2^5}+1$ не простое, так как делится на 641. (Проверьте! [2])

2. Дроби

54. Дробь $\frac{2}{3}$ занимала особое место у египтян, они всегда стремились выразить любую дробь в виде суммы $\frac{2}{3}$ и единичных дробей.

В задачах 7—9 папируса Ахмеса требуется разделить 7, 8, 9 хлебов поровну между 10 лицами.

Ответы выражаются так:

$$7:10=\frac{2}{3}+\frac{1}{30};\quad 8:10=\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30};$$

$$9:10=\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}.$$

Проверьте!

Как можно проще представить указанные дроби в виде суммы только единичных дробей?

---

[1] Нерешенным остается пока следующий вопрос: находится ли по крайней мере одно простое число между n^2 и $(n+1)^2$?

[2] В наше время известны уже 36 составных чисел вида F_n, в связи с чем возникла новая, пока не решенная проблема: Для всякого ли $n\geqslant 5$ F_n составное?

55. *Задача иранского ученого XVI в. Бехаэддина:* «Разделить 10 на 2 части, разность которых 5».

56. *Задача из Акмимского папируса* (VI в.) «Некто взял из сокровищницы $\frac{1}{13}$. Из того, что осталось, другой взял $\frac{1}{17}$. Оставил же он в сокровищнице 150. Мы хотим узнать, сколько было в сокровищнице первоначально?»

57. Надгробная надпись на могиле Диофанта имеет следующее содержание: «Диофант провел шестую часть своей жизни в детстве, двенадцатую — в юности, после седьмой части, проведенной в бездетном супружестве и еще 5 лет, у него родился сын, умерший по достижении половины числа лет жизни отца, после чего Диофант прожил только 4 года». Сколько лет жил Диофант?

58. *Из русского сборника* XVIII в. На вопрос: «Который час?» был дан ответ: « $\frac{2}{5}$ прошедших часов от полуночи до сего времени равны $\frac{2}{3}$ часов, оставшихся до полудня». Спрашивается, сколько сейчас времени?

59. О происхождении английской меры длины ярд рассказывают следующее: Король Генрих I (XII в.) приказал измерить расстояние от кончика своего носа до конца среднего пальца вытянутой руки и принял это расстояние за единицу измерения. Ярд до настоящего времени является в Англии основной мерой длины. 1 ярд $\approx$ 0,9144 *м*. Сколько километров в 153 ярдах?

60. Древневавилонская мера длины, стадий, употреблявшаяся и у египтян, греков, римлян, делилась на 360 «локтей» и равнялась приблизительно 194 м. Найти приближенную длину вавилонского локтя в метрической системе мер.

61. Записать без знаменателя дробь $\frac{4}{5}$ в пятеричной системе счисления.

62. Записать без знаменателя $2\frac{7}{12}$ в двенадцатеричной системе счисления.

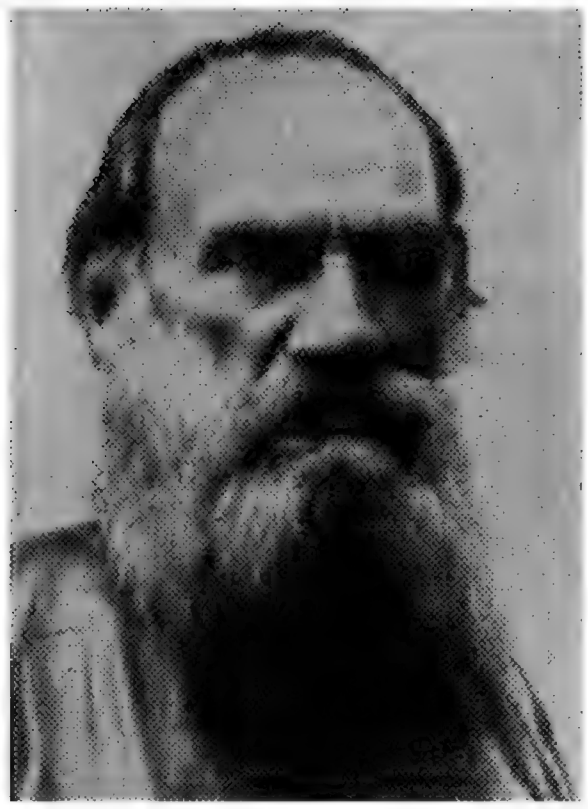
63. Выразить обыкновенной дробью число $[11{,}011]_2$.

3. Общий отдел

64. *Задача из «Арифметики» ал-Хорезми.* Найти число, зная, что если отнять от него $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$, то получится 8.

65. *Из истории арифметики Л. Ф. Магницкого.*
«Во едином нощеденствии 24 часа, а во едином годе 365 дней, и аще хощешь ведати, в годе или седмице или в 1000 днех, часов, умножай сице».

В наши дни эта задача звучит так. В одних сутках 24 часа, а в одном году 365 дней. Если хочешь знать, сколько часов в году или неделе, или в 1000 сутках, то умножь.



Л. Н. Толстой.

66. В рассказе «Репетитор» великий русский писатель А. П. Чехов приводит следующую задачу: «Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 рублей. Спрашивается, сколько аршин он купил того и другого, если синее сукно стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 рубля?»

67. *Древнеримская задача.* II в. «Некто, умирая, завещал: если у моей жены родится сын, то пусть ему будет дано $^2/_3$ имения, а жене остальная часть. Если же родится дочь, то ей — $^1/_3$, а жене — $^2/_3$. Родилась двойня — сын и дочь. Как же разделить имение?»

68. *Задача из «Математики в девяти книгах».* Сообща покупают курицу. Если каждый человек внесет по 9 (денежных единиц), то останется 11, если же каждый внесет по 6, то не хватит 16. Найти количество людей и стоимость курицы».

69. Один из лучших сборников «забавных задач» был издан в начале XVII в. французом Баше де Мезириак. Вот одна из них: «Рота пехоты подходит к берегу реки, но оказывается, что мост сломан, а брода нет. У берега 2 мальчика играли в челноке, но в таком маленьком, что в нем может переправиться 1 взрослый или двое детей. Спрашивается, как с помощью этого челнока рота переправится на другой берег?»

70. *Задача Ньютона.* «Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее в 24 дня, а 30 коров — в 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву за 96 дней?» (Предполагается, что коровы поедали траву равномерно.)

71. *Задача, приписываемая Эйлеру.*

Решив все свои сбережения поделить поровну между своими сыновьями, некто составил такое завещание: «Старший из моих сыновей должен получить 1000 рублей и $\frac{1}{8}$ часть остатка, следующий — 2000 руб. и $\frac{1}{8}$ нового остатка, третий — 3000 руб. и $\frac{1}{8}$ третьего остатка и т. д. Определить число сыновей и размер завещаемого сбережения».

72. Великий русский писатель Лев Николаевич Толстой (1828—1910) проявлял особый интерес к математике и ее пре-

подаванию, много лет преподавал начала математики в основанной им же знаменитой Яснополянской школе, написал оригинальную «Арифметику» и «Руководства для учителя». Своим гостям Л. Н. Толстой нередко предлагал многие интересные задачи, среди которых находится и следующая.

Задача Л. Н. Толстого. «Косцы должны выкосить два луга. Начав с утра косить большой луг, они после полудня разделились: одна половина осталась на первом лугу и к вечеру его докосила, а другая перешла косить на второй луг площадью вдвое меньше первого. Сколько было косцов, если известно, что в течение следующего дня оставшуюся часть работы выполнил один косец?»

§ 15. АЛГЕБРА

4. Действия над алгебраическими выражениями

а) Проверить следующие тождества, содержащиеся в геометрической форме *во* II *книге «Начал» Евклида:*

73. $ab+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

74. $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$.

75. $(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$.

76. $4(a+b)a+b^2=[(a+b)+a]^2$.

77. $a^2+b^2=2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2\right]$.

78. $(2a+b)^2+b^2=2[a^2+(a+b)^2]$.

б) Проверить следующие действия с дробями, изложенные в *«Арифметике» Диофанта:*

79. $\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+2x+1}+\frac{2x+1}{x+1}=\frac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$.

80. $\frac{8}{(x^2-2)^3}+\frac{8}{(x^2-2)^2}+\frac{2}{x^2-2}=\frac{2x^4}{(x^2-2)^3}$.

81. $\frac{3x}{x-3}+\frac{4x}{x-4}=\frac{7x^2-24x}{x^2+12-7x}$.

82. $\left(\frac{144}{x^4+900-60x^2}\right)\cdot 30+\frac{60}{x^2-30}=\frac{6x^2+2520}{x^4+900-60x^2}$.

83. $\frac{96}{x^4+96-12x^2}-\frac{12}{6-x^2}=\frac{12x^2+24}{x^4+36-12x^2}$.

в) Выполнить следующие действия над дробями, помещенными в *«Арифметике» М. Штифеля:*

84. $\frac{3}{2}x+\frac{4x^2}{3x^3}$.

85. $\dfrac{9x^4+8x^2}{6x^3}-\dfrac{3}{2}\ x.$

86. $\dfrac{9x^4+8x^2}{6x^3}\cdot\dfrac{3x}{2}.$

87. $\dfrac{27x^5+24x^3}{12x^3}:\dfrac{3x}{2}.$

г) Сократить дроби из *«Всеобщей арифметики» Ньютона:*

88. $\dfrac{6a^3-9ac^2}{6a^2+3ac^3}.$

89. $\dfrac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{a^2-ab}.$

90. $\dfrac{x^4-3ax^3-8a^2x^2+18a^3x-8a^4}{x^3-ax^2-8a^2x+6a^3}.$

91. $\dfrac{6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2}{9a^3b+27a^2bc-6abc^2+18bc^3}.$

д) Проверить следующие тождества *из «Универсальной арифметики» Эйлера:*

92. $(p^2+q^2)\,(r^2+b^2)=(pr+qs)^2+(ps-qr)^2=(pr-qs)^2+$
$+(ps+qr)^2.$

93. $(p^2+q^2)^2=(p^2-q^2)^2+(2pq)^2.$

94. $(p^2+q^2)^3=(p^3-3pq^2)^2+(3p^2q-q^3)^2.$

95. $(p^2+q^2)^4=(p^4-6p^2q^2+q^4)+(4p^3q-4pq^3)^2.$

96. $(a^2+b^2+c^2+d^2)\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=A^2+B^2+C^2+D^2,$

где: $A=a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta,$

$B=a\beta\pm b\alpha\pm c\delta\pm d\gamma,$

$C=a\gamma\mp b\delta-c\alpha\pm d\beta,$

$D=a\delta\pm b\gamma\mp c\beta-d\alpha.$

5. Разные задачи

Из задач ибн-Сина (Авиценны).

Проверить, что:

97. «Если число, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, даст в остатке 1».

98. «Если число, разделенное на 9, дает в остатке 2 или 7, то квадрат его при делении на 9 даст в остатке 4».

99. «Если число, деленное на 9, даст в остатке 1; 4 или 7, то куб его, деленный на 9, даст в остатке 1».

Из рукописей XV—XVI вв.

100. «Как велико число, равное произведению 4/5 его на 5/6 того же числа?»

101. «Число 10 разделить на две такие части, чтобы после уменьшения первой на 5 и деления полученного произведения на вторую часть получилось 10/3».

Из задач Эйлера.

102. «Найти число, четвертая степень которого, деленная на половину самого числа и увеличенная на $14\frac{1}{4}$, равнялась бы 100».

103. «Произведение двух чисел, из коих каждое есть сумма четырех квадратов, также равно сумме четырех квадратов. Доказать!»

Из «Курса математики» французского автора Ж. Озанама (X—XI вв.).

104. «Трое хотят купить дом за 24 000 ливров. Они условились, что первый даст половину, второй — одну треть, а третий — оставшуюся часть. Сколько даст каждый?»

Из «Всеобщей арифметики» Ньютона.

105. «Некто желает распределить между бедными деньги. Если бы у него было на восемь динариев больше, то он мог дать каждому по три, но он раздает лишь по два, и у него остается три. Сколько было бедных?»

6. Линейные уравнения и их системы

Из алгебры арабского математика и астронома ал-Караджи (X—XI вв.).

106. $x + \frac{y}{3} = 3y, \quad y + \frac{x}{4} = 2x.$

Задача Герона Александрийского.

107. «Бассейн емкостью в 12 кубических единиц получает воду через две трубы, из которых одна дает в каждый час кубическую единицу, а другая в каждый час — четыре кубические единицы. В какое время наполнится бассейн при совместном действии обеих труб?»

Две задачи Бхаскары.

108. «Из множества чистых цветков лотоса были принесены в жертву: Шиве — третью долю этого множества, Вишну — пятую и Солнцу — шестую; четвертую долю получил Бхавани, а

остальные шесть цветков получил уважаемый учитель. Сколько было цветков?»

109. Некто сказал другу: «Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя». Друг ответил: «Дай ты мне только 10, и я стану в 6 раз богаче тебя». Сколько было у каждого?

110. *Старинная задача:* «Летело стадо гусей, навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» Те ему отвечают: «Нет, нас не сто гусей! Если бы нас было еще столько, сколько есть, да еще полстолько, да четверть столько, да еще ты, гусь, с нами, тогда нас было бы ровно сто гусей». Сколько их было?

Задача Бехаэддина.

111. «Найти число, которое будучи увеличено двумя третями самого себя и единицей дает 10».

Из книги «Косс» Адама Ризе (XVI в.)

112. «Трое выиграли некоторую сумму денег. На долю первого пришлось 1/4 этой суммы, на долю второго 1/7, а на долю третьего 17 флоринов. Как велик весь выигрыш?»

Из книги «Косс» К. Рудольфа (XVI в.)

113. «Некто согласился работать с условием получить в конце года одежду и 10 флоринов. Но по истечении 7 месяцев прекратил работу и при расчете получил одежду и 2 флорина. Во сколько ценилась одежда?»

ВЕКА И ГОДЫ. ХРОНОЛОГИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Указать точные даты возникновения основных понятий математики в древнейшие времена невозможно. Еще до возникновения письменности у первобытных народов стали складываться начальные представления о числах и фигурах. С возникновением письменности появились первые символы для обозначения чисел и стали складываться некоторые системы нумерации целых чисел.

Ниже в хронологической последовательности перечислены наиболее важные события в развитии математики от ее зарождения до наших дней.

Века до н. э.[1]

CL — L — 1) К временам древнего каменного века (палеолита) восходят первые ступени образования понятий числа и протяженности.
2) Зарождение простейших понятий пространственных форм и количественных отношений. Счет числами-свойствами. Первые рисунки в пещерах.

L—XXX — 1) Развитие пальцевого и узлового счета. Создание пятеричной, десятичной и двадцатеричной систем счисления.
2) Обжиг и раскраска глиняных сосудов, изготовление корзин. Неолитические орнаменты, выявляющие равенство, симметрию и подобие фигур.

XXX—XVII—1) Появление календаря в Вавилоне и Египте.
2) Вавилонская математика. Шестидесятеричная — первая позиционная — система счисления. Клинописные таблички. Таблицы для деления и умножения. Задачи, сводящиеся к решению линейных и квадратных уравнений и систем уравнений. Прави-

[1] Даты до VI в. н. э. грубо приближенные.

ла для определения площадей и объемов. Применение «теоремы Пифагора». Зачатки тригонометрии.
3) Египетская математика. Папирусы «Ахмеса» и «Московский» (около 2000 г. до н. э.). Площади и объемы фигур ($\pi = 3{,}16$).

VII—VI — 1) Фалес Милетский. Зарождение дедуктивной геометрии. Доказательство первых теорем.
2) Школа Пифагора. Зарождение теории чисел. Четные и нечетные, дружественные, совершенные и фигурные числа. Начало учения о правильных многогранниках. Открытие несоизмеримых. Начало геометрической алгебры.
3) «Сульва-сутра» («Правила веревки») в Индии.

V — 1) Золотой век эллинской культуры. Драматурги Эсхил, Софокл и Еврипид; историки Геродот и Фукидид; философы и математики Сократ, Анаксагор и Антифон (квадратура круга), Демокрит из Абдеры (перспектива, начало математического атомизма, объем конуса и пирамиды), Зенон (парадоксы движения), Гиппократ Хиосский («луночки», введение строгих доказательств, первый систематический трактат дедуктивной геометрии), Теодор Киренский (доказательство иррациональности квадратных корней неквадратных чисел), Гиппий Элидский (применение квадратрисы для трисекции угла). Развитие дедуктивной геометрии. Систематическое обоснование почти всей плоской геометрии. Развитие стереометрии. Развитие теории чисел, построение пифагорейцами теории делимости и пропорциональности чисел. Доказательство несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, равной единице. Геометрическая алгебра.

IV — 1) Век Платона и Аристотеля. Архит Таренский предлагает стереометрическое решение задачи удвоения куба, разрабатывает арифметическую теорию непрерывных пропорций, применяет математику к астрономии, механике и музыке. Решение классических задач древности с помощью алгебраических и трансцендентных кривых. Теэтет Афинский классифицирует иррациональности и развивает учение о пяти правильных многогранниках. Менехм открывает конические сечения.
2) Евдокс Книдский — первая математическая теория движения планет; общая теория отношений и пропорций, метод исчерпывания, аксиома Евдокса — Архимеда.

3) Аристотель — теория дедукции как основное содержание логики. Принципы построения дедуктивной науки. Обозначение величин буквами.
4) Евдем Родосский — первая история математики.

III — 1) «Начала» Евклида — первое дошедшее до нас произведение, содержащее систематическое дедуктивное изложение теории и основы античной математики.
2) Архимед — инфинитезимальные методы (предвосхитившие дифференциальное и интегральное исчисление) для нахождения площадей и объемов, проведения касательных, определения максимумов и минимумов; применение геометрии в механике и технике, определение длины и площади круга $\pi = 3\frac{1}{7}$ (площади параболического сегмента, боковой поверхности конуса и цилиндра, поверхности и объема шара, поверхностей и объемов коноидов и сфероидов). Формула Архимеда — Герона.
3) Аполлоний Пергский — «Конические сечения»; зарождение идей прямолинейных координат и предвосхищение аналитической и проективной геометрии. Введение терминов *эллипс, парабола, гипербола;* «Плоские геометрические места»: гомотетия, подобие, инверсия.
4) «Решето» Эратосфена. Измерение меридиана.

II—I — 1) Гиппарх — начало математической картографии. Географические координаты — *широта* и *долгота.* Первые соотношения сферической тригонометрии и таблицы хорд.
2) Изопериметрические задачи у Зенодора.
3) Посидоний и Гемин — одна из первых попыток доказательства V постулата.
4) Китайский трактат «Математика в девяти книгах». Алгорифм решения системы линейных уравнений со многими неизвестными; возникновение понятия отрицательного числа.

Века н. э.

I — 1) Герон Александрийский — *прикладная математика;* приближенное извлечение корней, правила определения площадей неправильных поверхностей и плоских фигур, измерительные инструменты.
2) Никомах из Геразы — фигурные числа, совершенные числа.

II — 1) Менелай Александрийский — «Сферика»; первое систематическое изложение сферической геометрии. Появление понятия сферического треугольника, доказательство теоремы о том, что сумма углов сферического треугольника больше $2d$. Теорема Менелая. Полный четырехсторонник.
2) Клавдий Птолемей — «Алмагест»: теоремы сферической и прямолинейной тригонометрии, таблица хорд. «Аналемма» и «Планиферий». Ортогональные проекции на три взаимно перпендикулярные плоскости; стереографическая проекция.

III — 1) Папп Александрийский — «Математическое собрание»: обобщение теоремы Пифагора, решение изопериметрических задач, предложения, предвосхищающие теории Гульдена; «Поризмы» — сложное и гармоническое отношение четырех точек и четырех прямых, гармонические свойства полного четырехсторонника, конфигурация Паппа, начало теории поляр. Сведения из истории математики.
2) Диофант Александрийский — «Арифметика»: начала символической алгебры, решение задач на уравнения до 4-й степени включительно, в большинстве неопределенные. Теоретико-числовые задачи.
3) Возникновение понятия десятичной дроби в Китае.

IV—V — Гипатия — первая женщина-математик.

V — 1) Прокл — комментарий к «Началам» Евклида, попытка доказательств V постулата. Сведения из истории математики.
2) Начало расцвета математики в Индии. Возникновение позиционной системы счисления. Ариабхатта. Введение синуса и косинуса. Решение прямоугольных треугольников. Суммирование арифметических рядов. Решение неопределенных уравнений 1-й степени.

VI—VIII — Разработка современных правил арифметических действий с целыми и дробными числами в Индии. Тройное правило. Проверка с помощью девятки. Брахмагупта — обобщение правила решения квадратных уравнений. Операции с иррациональными и отрицательными числами. Попытка создания алгебраической символики. Неопределенные уравнения 1-й и 2-й степени. Циклические четырехугольники.

VI — Учение о параллельных в Византии. Аганис и Симпликий — попытки доказательства V постулата.

VII — Расцвет математики в Армении. Анания Ширакаци — «Шеститысячник».

VIII — 1) «О счете времени» и описание пальцевого счета у Беды Достопочтенного.
2) Алькуин — «Задачи для изощрения ума юношей».
3) Создание астрономо-математической школы в Багдаде.

IX — 1) Начало расцвета математики в странах Ближнего и Среднего Востока. Арифметика ал-Хорезми — распространение десятичной позиционной нумерации. «Краткая книга об исчислении ал-джабр и алмукабалы» — первая книга по алгебре на Востоке. Классификация квадратных уравнений.
2) Ал-Хабаш ал-Хасиб ал-Марвази. Введение тангенса и котангенса. Первая таблица тангенсов и котангенсов.
3) Перевод на арабский язык и комментирование греческих авторов. Развитие числовой алгебры, практической арифметики, тригонометрии, конструктивной геометрии.
4) Ибн Корра Сабит — «О составлении отношений». Новый метод измерения параболы. Попытки доказательства V постулата. Метод нахождения «дружественных» чисел. Трактат о «фигуре секущих» (теорема Менелая о полном четырехстороннике). Ал-Джаухари, ан-Найризи.

IX—X — 1) Абу Камил — «Книга об алгебре»; операции со сложными квадратическими иррациональностями.
2) Ал-Баттани — «Усовершенствование Алмагеста»; сферическая теорема косинусов, соотношения между синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом, секансом и косекансом.
3) Суммирование арифметических и геометрических рядов в Индии. Магавира. Пифагоровы числа. Шриддхара — «Тришатика», «Патиганита». Индийские приемы арифметических действий, свойства нуля как числа. Приближенные формулы для вычисления площадей.

X — Абу-л-Вафа. Построения с помощью линейки и циркуля постоянного раствора. Преобразование квадратов. Сферическая теорема синусов. Теорема

тангенсов для прямоугольного сферического треугольника. Комментарии к «Арифметике» Диофанта.

X—XI — 1) Первые признаки духовного пробуждения в Западной Европе. Герберт и его апексы. Абацисты.
2) Ал-Караджи (ал-Кархи) — «Ал-фахри». Арифметические действия над квадратичными и кубическими иррациональностями. Решение уравнений высших степеней, приводимых к квадратным. Суммирование арифетических рядов.
3) Ибн ал-Хайсам — «Книга оптики», «Об измерении параболических тел». Геометрическое решение уравнений 3-й и 4-й степени. Вычисление объема тела, образованного вращением сегмента параболы вокруг хорды. Попытка доказательства V постулата.
4) Ал-Беруни — «Канон Мас'уда», «Памятники минувших поколений». Развитие плоской и сферической тригонометрии, подробные тригонометрические таблицы. Сведение задачи построения правильного 9-угольника к кубическому уравнению $x^3+1=3x$ и приближенное его решение. Геометрическое обоснование тригонометрических правил. Обобщения теории стереографической проекции.
5) Ибн Сина (Авиценна): Математические главы энциклопедических трактатов, «Книга исцеления», «Книга знания», «Книга спасения».

XI—XII — 1) Омар Хайям. Дальнейшее развитие алгебры как самостоятельной науки. Извлечение корней любой степени. Классификация и геометрическое решение кубических уравнений с помощью конических сечений. Новое определение равенства отношений непрерывных величин, основанное на разложении в непрерывные дроби. Принцип непрерывности, расширение понятия числа до положительного действительного числа. Развитие теории параллельных линий — «Четырехугольник Хайяма — Саккери». Первые теоремы неевклидовой геометрии.
2) «Исфаханский аноним» и его «Собрание правил науки астрономии». Первое систематическое изложение сферической и плоской тригонометрии независимо от астрономии. Теория составных отношений. Первое изложение 6 случаев решения сферических треугольников по трем данным элементам. Введение понятия полярного треугольника и его применение для определения сторон сферического треугольника по его углам.

XII — 1) Бхаскара II. — «Сиддханта- сиромани» (Венец науки), «Лилавати». Правила умножения и деления отрицательных чисел. Два знака квадратного корня. Применение алгебры к геометрии. Диофантов анализ, «уравнение Пелля». Задачи комбинаторики.
2) Переводы математических произведений с арабского и греческого языков на латинский язык в Западной Европе. Аделард из Бата, Иоанн Севильский, Платон из Тиволи, Савасорда, Герардо из Кремоны — перевод арифметики и алгебры ал-Хорезми. Начало распространения десятичной позиционной системы в Европе Борьба между абацистами и алгоритмиками.

XIII — 1) Насир ад-Дин ат-Туси. «Эльханские» астрономические таблицы. «Изложение Евклида». Развитие теории параллельных. «Трактат о полном четырехстороннике». Учение о составных отношениях и расширение понятия о числе. «Сборник по арифметике с помощью доски и пыли». Формула «бинома Ньютона» $(a+b)^n$, правила образования коэффициентов до $n=12$.
2) Развитие алгебры в Китае. Метод *тянь-юань* («метод Горнера») для решения уравнений высших степеней. Цинь Цзю-шао, Ли Е, Ян Хуэй, Чжу Ши-цзе. Решение нелинейных систем уравнений с четырьмя неизвестными. Суммирование конечных рядов. Квадратичное и кубическое интерполирование.
3) Первые сдвиги в развитии математики в Западной Европе. Производство бумаги и начало вытеснения абака. Леонардо Фибоначчи. «Книга абака» (1202) — первое в Европе полное изложение арифметики и алгебры линейных и квадратных уравнений. Первое появление терминов «плюс» и «минус», дробной черты, таблицы простых чисел. «Практика геометрии»: первое доказательство теоремы о пересечении медиан треугольника в одной точке. «Книга квадратов» — исследования по теории чисел.
4) Иордан Неморарий — «О данных числах». Систематическое применение буквенных обозначений.
Сакробоско — «Обыкновенный алгоризм».
5) Джованни Кампано — новый латинский перевод «Начал» Евклида (1260) с комментария-

ми и дополнениями. Изучение звездчатых многоугольников. Угол касания и непрерывность.
6) «Оптика» польского ученого Витело. Учение о перспективе.

XIV — 1) Ибн ал-Банна — «Правило чаш весов». Отдельные алгебраические обозначения.
2) Нарайана — суммирование числовых рядов в Индии.
3) Леви бен Гершон (Лев Герсонид) — «Труд вычислителя» (1321): учение о соединениях, первое явное выражение принципа математической индукции. «Комментарии к введениям книги Евклида» — первая в Западной Европе попытка доказательства V постулата. Теорема синусов.
4) Томас Брадвардин — «Теоретическая геометрия»: развитие учения о звездчатых многоугольниках; изопериметрические свойства фигур. Проблема заполнения пространства конгруэнтными правильными телами. Начало учения о дробных отношениях. Проблема роговидных углов. «Трактат о пропорциях» — учение о континууме и критика инфинитно-атомистической концепции.
5) Николь Орем — «Алгоризм пропорций». Развитие учения о дробных отношениях. Обобщение действий возведения в степень на положительные дробные показатели. «О конфигурации качеств» — прообразы идеи функциональной зависимости и ее графического изображения.
6) Иммануил Бонфис — первая попытка систематического изложения учения о десятичных дробях.

Годы

1362 — Возникновение идеи метода координат.

1427 — «Ключ арифметики» ал-Каши. Учение о десятичных дробях.

1430 — «Тригонометрия» профессора Венского университета Иоганна из Гмундена.

1450 — Приближенные построения Николая Кузанского. Проблема прерывного и непрерывного.

1460 — Сочетание шестидесятеричной и десятичной системы счисления в тригонометрии Г. Пейрбаха.

1461 — Первая немецкая алгебра. Рукопись Фридерикуса Герхарда.

1464 — «Пять книг о треугольниках всех видов» Региомонтана — первое в Европе систематическое из-

ложение тригонометрии как самостоятельной математической дисциплины (напечатано в 1533 г.). Появление знаков «+» и «—» в рукописях. Самые точные тригонометрические таблицы того времени. Применение десятичной позиционной системы в тригонометрических таблицах.

1470 — Ал-Каласади. Появление алгебраической символики в мусульманской Испании.

1478 — Первая печатная работа по математике — «Тревизская арифметика» (Италия).

1482 — Первое появление (Венеция) в печати «Начал» Евклида (латинский перевод Кампано с арабского).

1484 — «Наука о числах в трех частях» Н. Шюке. Введение нулевого и отрицательных показателей степени. Развитие алгебраической символики.

1489 — Первое появление в печати знаков «+» и «—» в книге «Быстрый и красивый счет» Яна Видмана, изданной в Лейпциге.

1494 — «Сумма (знаний) по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности Луки Пачоли. Введение алгебраических знаков.

1502 — «Научный сборник» и другие индийские рукописи XV—XVI вв., в которых содержатся правила разложения в степенные ряды тригонометрических функций.

1505 — Второе печатное издание (Венеция) «Начал» Евклида (латинский перевод с греческого).

1509 — «О божественной пропорции» Пачоли. Элементы перспективы.

1511 — «О живописи» Л. Б. Альберти (написано в 1435 г.). Начало учения о перспективе.

1522 — Первая математическая книга, напечатанная в Англии, — «Арифметика» Тонсталя.

1525 — «Алгебра» К. Рудольфа. Коссические знаки. Появление знака корня. «Наставление об измерении с помощью циркуля и линейки» А. Дюрера. Развитие учения о перспективе.

1544 — «Полная арифметика» М. Штифеля. Отрицательные числа как числа меньше нуля. Введение круглых скобок и символов для многих неизвестных. Идея логарифмов.

1545 — «О великом искусстве» Кардано. Открытие решения в радикалах уравнений 3-й и 4-й степени. «Формула Ферро — Тарталья — Кардано» и «Формула Феррари». Первое исследование вопроса о мнимых корнях уравнений. Методы приближенного решения уравнений любой степени.

1551 — «Таблицы науки о треугольниках» Ретика.

1556 — «Общее исследование чисел и мер» Н. Тартальи. Применение круглых скобок и «треугольника Паскаля».

1557 — «Алгебра» Р. Рекорда. Введение знака равенства «=».

1569 — 1) «Карта мира» Г. Меркатора. Развитие учения о стереографической проекции.
2) «Геометрия» П. Рамуса. Первое выступление против «Начал» Евклида как учебного пособия.

1572 — «Алгебра» Р. Бомбелли. Начало учения о мнимых числах. Непрерывные дроби.

1574 — Издание «Начал» Евклида и комментарии Хр. Клавиуса.

1579 — «Математические таблицы» Ф. Виета. Развитие гониометрии и начало аналитической теории тригонометрических функций. Первый пример бесконечного произведения (для выражения π).

1580 — Вычисление π с 35 знаками Лудольфом ван Кейленом.

1583 — «Геометрия круглого» Т. Финка. Введение терминов «тангенс», «секанс». Теорема тангенсов.

1585 — «О десятой» С. Стевина. Открытие десятичных дробей в Европе. Развитие алгебраической символики. Составление таблиц сложных процентов, предвосхитивших таблицы логарифмов.

1591 — «Введение в аналитическое искусство» Ф. Виета. Создание алгебраической символики и начало буквенного исчисления. Введение квадратных и фигурных скобок. «Теорема Виета».

1592 — Исследование алгебраических уравнений и формулы для тригонометрических функций и кратных дуг у Виета.

1593 — Введение десятичной точки Хр. Клавиусом.

1595 — Введение термина «тригонометрия» В. Питиском.

1600 — Сочинение о перспективе Г. Убальдо дель Монте. Введение понятия точек схода в учении о перспективе.

1603 — Основание Академии дей Линчеи в Риме.

1604 — «Оптическая часть астрономии» («Дополнения к Вителo») И. Кеплера. Развитие учения о перспективе. Введение понятия и термина «бесконечно удаленная точка». Первое применение термина «фокус». Принцип непрерывности Кеплера. Введение понятия радиуса кривизны.

1609 — «Новая астрономия» Кеплера. Первые два закона движения планет.

1612 — «Занимательные и приятные задачи» Баше де Мезириака.

1613 — Введение повторного применения дробной черты при записи непрерывных дробей итальянским математиком П. Катальди.

1614 — Появление в печати первой таблицы логарифмов — «Описание удивительной таблицы логарифмов» Дж. Непера.

1615 — «Новая стереометрия винных бочек» Кеплера. Кубатуры тел.

1617 — Первая таблица десятичных логарифмов Г. Бриггса (для чисел 1-й тысячи).

1619 — «Гармония мира» И. Кеплера. 3-й закон движения планет.

1620 — Появление в печати «Таблиц арифметической и геометрической прогрессии» И. Бюрги (написаны в 1611 г.).

1623 — Первая счетная машина (Шиккарда).

1624 — 1) «Логарифмическая арифметика» Бриггса. Подробная таблица десятичных логарифмов.
2) Первая логарифмическая линейка (Э. Гунтера).

1629 — «Новое изобретение в алгебре» А. Жирара. Первое геометрическое истолкование отрицательных чисел. Первая формулировка «основной теоремы алгебры». Первое применение двойного знака «$\pm$».

1631 — 1) «Практика искусства анализа» (написана в 1621 г.) Т. Гарриота — совершенствование алгебраической символики. Введение знаков неравенства «$>$» и «$<$».

2) «Ключ математики» В. Оутреда. Введение знака умножения «×».

1633 — Двоеточие как знак деления, введенный Джонсоном.

1634 — Геометрические и другие символы Эригона.

ок. 1635 — 1) «Геометрия неделимых» Б. Кавальери. Принцип Кавальери. Решение ряда задач интегрального исчисления. Квадратура степенной функции (с натуральным показателем).
2) «Введение в учение о плоских и телесных местах» П. Ферма — первая работа, содержащая начала аналитической геометрии (опубликована в 1679 г.).

1637 — «Геометрия» Декарта. Основы метода прямолинейных координат и начала аналитической геометрии. Введение понятия переменной величины и функции. Современные алгебраические обозначения и записи формул. Правило знаков для определения числа положительных и отрицательных корней. Границы действительных корней. Метод построения касательных и нормалей к плоским кривым.

1639 — Основы проективной геометрии: «Первоначальный набросок» Ж. Дезарга. «Опыт о конических сечениях» Б. Паскаля. Теоремы Дезарга и Паскаля.

1641 — Суммирующая машина Б. Паскаля.

1642—1644 — 1) Частичная публикация работы П. Ферма «Метод исследования максимумов и минимумов», в которой решен ряд задач дифференциального исчисления. Работы П. Ферма по теории чисел.
2) «Геометрические труды» Э. Торричелли. Интеграционные методы.

1647 — «Геометрический труд» Г. Санкт-Винцента. Кубатуры тел.

1654 — Работы Б. Паскаля по арифметике, теории чисел, алгебре и теории вероятностей (опубликованы в 1665 г.). Общий признак делимости любого целого числа на любое другое («Трактат о делимости чисел»), комбинаторика и применение принципа математической индукции («Трактат об арифметическом треугольнике»). Разработка вопросов анализа бесконечно малых — «характеристический треугольник», вычисление площадей и объемов.

1656 — «Арифметика бесконечных» Дж. Валлиса. Развитие идей Кавальери. Интегрирование алгебраических функций. Элементы теории пределов. Применение (и введение термина) «интерполирования» функций. Обобщение понятия показателя степени на все вещественные числа. Символ бесконечности. «Формула Валлиса» для выражения

$$\frac{4}{\pi}=\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\ \ldots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\ \ldots}.$$

1657 — «О расчетах в азартной игре» Х. Гюйгенса.

1660 — Основание Лондонского королевского общества.

1663 — «Доказательство» Валлисом V постулата Евклида.

1666 — Основание Парижской Академии наук.

1668 — 1) «Логарифмотехника» Н. Меркатора. Появление первого разложения функции (логарифмической) в степенной ряд.
2) Начало представления функций с помощью бесконечных рядов У. Броункером, И. Ньютоном и Дж. Грегори.
3) «Формула Симпсона» приближенного интегрирования, открытая Дж. Грегори.

1670 — «Лекции по оптике и геометрии» И. Барроу. Установление взаимной обратимости дифференцирования и интегрирования. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

1670—1671 — «Метод флюксий и бесконечных рядов». И. Ньютона (опубликован в 1736 г.). Создание дифференциального и интегрального исчисления.

1672 — Школьное издание К. Дешаля «Начал» Евклида.

1673 — «Маятниковые часы» (второе издание) Х. Гюйгенса. Теория эволют и эвольвент.

1674 — Счетная машина Г. Лейбница.

1675 — Появление в рукописях Лейбница знака интеграла $\int$ и дифференциала d.

1678 — «О взаимно пересекающихся прямых» Дж. Чевы. Теоремы Чевы.

1680 — Х. Гюйгенс впервые дает научное изложение теории цепных дробей в связи с работой над «планетной машиной».

1683 — Японский математик Секи Кова открывает определители, решая с их помощью системы линейных уравнений.

1684 — «Новый метод....» Лейбница — первая печатная работа по дифференциальному исчислению.

1685 — «Трактат по алгебре» Дж. Валлиса — первая попытка геометрического истолкования мнимых чисел.

1686 — «О глубокой геометрии...» Лейбница — первая печатная работа по интегральному исчислению.

1687 — «Математические начала натуральной философии» И. Ньютона. Основные понятия и принципы классической механики. «Метод первых и последних отношений». Исследование некоторых видов дифференциальных уравнений и задач вариационного исчисления.

1689 — «Арифметика» И. Ф. Копиевича — первая русская печатная работа по математике.

1693 — 1) Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов у Лейбница; его описание механизма для приближенного графического интегрирования. Начала теории определителей в Европе.
2) Таблицы смертности Э. Галлея.

1696 — 1) Решение Ньютоном, Лейбницем, Я. Бернулли и Г. Лопиталем задачи о брахистохроне. Зарождение вариационного исчисления.
2) Первый учебник дифференциального исчисления (Г. Лопиталя).

1700 — Основание Берлинской Академии наук.

1703 — 1) «Арифметика» Л. Магницкого — первый русский печатный учебник математики, получивший широкое распространение.
2) Издание Д. Грегори «Начал» Евклида.

1706 — Введение Джонсом греческой буквы «π» для обозначения отношения между длиной окружности и ее диаметром.

1707 — 1) Выход в свет «Всеобщей арифметики» Ньютона. Завершение трудов Виета, Декарта и др. в деле перехода от риторической и геометрической алгебры к символической и числовой алгебре. Явное определение действительного числа как отношения двух однородных величин.
2) Формула Муавра.

1713 — Выход в свет «Искусства предположений» Я. Бернулли. Развитие комбинаторики и теории вероят-

ностей. «Бернуллиевы числа». «Теорема Бернулли» (важный частный случай закона больших чисел).

1715 — «Метод приращений» Б. Тейлора. Ряд Тейлора. Исчисление конечных разностей.

1716 — «Учение о случае» А. Муавра.

1724 — Основание Петербургской Академии наук.

1728 — Уравнение геодезической линии на поверхности, выведенной Эйлером.

1729 — Введение Эйлером гамма-функции, символа $f(x)$.

1730 — Формула Стирлинга.

1731 — «О кривых двоякой кривизны» А. Клеро — первое изложение учения о пространственных кривых.

1733 — «Евклид, очищенный от всех пятен» Дж. Саккери. Попытка доказательства от противного V постулата.

1736 — Введение Эйлером символа «*e*».

1741 — «Элементы геометрии» А. Клеро. Критика «Начал» Евклида с педагогических позиций. Начало генетического метода в преподавании геометрии.

1742 — 1) «Курс интегрального исчисления» И. Бернулли. Разработка методов решения дифференциальных уравнений, учение о геодезических линиях.
2) «Трактат о флюксиях» Маклорена. Ряд Маклорена.

1743 — 1) «Трактат о динамике» Ж. Даламбера. Принцип Даламбера. Общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем.
2) Эйлер публикует найденный им еще в 1734 г. первый метод решения однородного линейного дифференциального уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами.
3) Введение А. Клеро понятия криволинейных интегралов.

1746 — «Начала алгебры» А. Клеро.

1746—1779—Даламбер (1746), Эйлер (1755) и Лагранж (1779) пользуются функциями комплексного переменного для решения задач гидродинамики и конформного отображения. Условия аналитичности функции комплексного переменного.

1746—1748—Работы по теории колебаний струны Ж. Даламбера. Основание теории уравнений в частных про-

изводных. Доказательство Даламбера основной теоремы алгебры.

1748 — 1) «Введение в анализ бесконечных» Эйлера. Развитие учения о бесконечных рядах. Формулы Эйлера. Алгебраическая теория исключения. Аналитическая геометрия в пространстве. Аналитическая теория тригонометрических функций. Символы $\sin x$, $\cos x$ и др.

1750 — «Введение в анализ алгебраических кривых» Г. Крамера — первое систематическое изложение основ теории определителей (независимо от Секи Кова). «Правило Крамера».

1752 — «Теорема Эйлера» для выпуклых многогранников.

1755 — 1) Работа о колебании струны Д. Бернулли. Первые тригонометрические ряды («ряды Фурье»). Уравнения в частных производных.
2) «Дифференциальное исчисление» Л. Эйлера.
3) Основание Московского университета М. В. Ломоносовым.

1755—1767 — Математические статьи Даламбера во французской «Энциклопедии». Новые взгляды на преподавание геометрии.

1756 — Школьное издание Р. Симсона «Начал» Евклида.

1758 — Первый обширный труд по истории математики Ж. Монтюкла (2-е издание, 1789—1802).

1760 — Аналитическое вариационное исчисление Ж. Лагранжа.

1762 — «Аналитические этюды» Э. Варинга. Исследование симметрических функций.

1767 — 1) «О решении численных уравнений» Лагранжа. Приближенные вычисления с помощью непрерывных дробей.
2) «О кривизне поверхности» Л. Эйлера. Первое применение понятия кривизны к поверхности.

1768 — Доказательство И. Г. Ламбертом иррациональности числа π.

1766—1774 — «Интегральное исчисление» в трех томах Л. Эйлера (в 1794 г. был опубликован 4-й том).

1769 — Введение Эйлером двойных интегралов.

1770 — «Полное введение в алгебру» Л. Эйлера.

1771 — 1) «Размышления о решении уравнений» Лаг-

ранжа. Общее решение Лагранжем неопределенных уравнений 2-й степени.
2) «Мемуар о развертках» Г. Монжа. Введение понятия соприкасающейся сферы.

1772 — «Курс математики» Э. Безу (русский перевод в 1794 г.).

1773 — Введение Лагранжем тройных интегралов.

1774—1779 — Разработка Лагранжем общего метода решения дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

1776 — Теорема Менье.

1777 — Введение Эйлером знака «i» для $\sqrt{-1}$.

1779 — «Общая теория алгебраических уравнений» Э. Безу. Теорема Безу.

1781 — Школьное издание И. Ф. Лоренца «Начал» Евклида.

1784 — «Евклидовы стихии» — перевод «Начал» с греческого П. Суворова и В. Никитина.

1786 — «Теория параллельных» И. Ламберта.

1788 — «Аналитическая механика» Лагранжа.

1793 — Развитие А. Лежандром теории эллиптических интегралов.

1794 — «Элементы геометрии» Лежандра.

1795 — «Приложение анализа к геометрии» Г. Монжа (опубликовано в 1811 г.) — первое систематическое изложение теории поверхностей. Истолкование уравнений в частных производных с помощью кривых и поверхностей.

1796 — 1) Решение Гауссом задачи «деления круга». Построение правильного 17-угольника. Теория двучленных уравнений.
2) «Евклидовы элементы геометрии» Н. Курганова.

1797 — 1) «Теория аналитических функций» Лагранжа; его «Лекции по исчислению функций» (1801) — попытка сведения анализа к алгебре.
2) Школьное издание Дж. Плейфера «Начал» Евклида.
3) «Геометрия циркуля» Л. Маскерони.
4) Первое доказательство Гауссом основной теоремы алгебры.

1798 — 1) «Опыт теории чисел» Лежандра.
2) «Опыт об усовершении элементов геометрии» С. Гурьева. Попытка доказательства V постулата.

1799 — 1) «Об аналитическом представлении направлений» К. Весселя.
2) «Общая теория уравнений» итальянского математика П. Руффини. Попытка доказательства неразрешимости в радикалах общего алгебраического уравнения 5-й степени.
3) «Начертательная геометрия» Г. Монжа.

1799—1825—«Небесная механика» (5 томов) П. Лапласа. Уравнение Лапласа.

1800—1801—1) Педагогическая система Песталоцци. Начало «наглядной геометрии».

1800 — «Курс математики» Т. Осиповского.

1801 — 1) «Арифметические исследования» Гаусса — начало современной теории чисел. Теория квадратичных форм, вычетов и сравнений второй степени. Закон квадратичной взаимности («золотая теорема»).
2) «О корреляции фигур» Л. Карно.

1802 — «Трактат дифференциального и интегрального исчисления» Т. Лакруа.

1803 — 1) «Геометрия положения» Л. Карно.
2) «Элементы статики» Л. Пуансо. Геометрические методы в исследовании проблем механики. Теория пары сил. Разработка теории векторов.

1805 — Открытие и применение метода наименьших квадратов Лежандром (независимо — Гуассом в 1808 г.).

1806 — 1) «Опыт представления мнимых чисел с помощью геометрических построений» Аргана — открытие независимо от Весселя геометрической интерпретации комплексных чисел.
2) «Опыт о трансверсалях» Л. Карно.

1807—1811—Первые работы Ж. Фурье по теории распространения тепла. Задача колебания струны и расширение понятия функции.

1809 — Исследование четырех видов правильных звездчатых многогранников Л. Пуансо.

1811 — «Трактат по механике» С. Пуассона. Развитие математической физики.

1812 — 1) «Аналитическая теория вероятностей» П. Лапласа. Доказательство им и С. Пауссоном (1837) первых предельных теорем теории вероятностей.
2) «Элементы геометрии» Л. Бертрана.

1814—1816—Издание Ф. Пейрара «Начал» Евклида.

1819 — Издание Ф. Петрушевского «Начал» Евклида (продолжение в 1835 г.)

1821 — 1) «Курс анализа» О. Коши, за которым последовали «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823), «Лекции по приложениям анализа к геометрии» (2 тома, 1826—1828). Четкие определения понятий предела и непрерывности функций и систематическое использование их в изложении анализа. Основы строгой теории сходимости рядов (независимо заложенные до этого К. Гауссом в 1812 г. и Б. Больцано в 1817 г.). Развитие основ теории функций комплексного переменного, заложенных Эйлером и Даламбером.

1822 — 1) «Трактат о проективных свойствах фигур» Ж. Понселе — первое выделение проективных свойств в особый класс.
2) «Аналитическая теория тепла» Ж. Фурье. Развитие математической физики. Ряды Фурье.

1823 — Учебник «Геометрии» Н. И. Лобачевского. Идея фузионизма в преподавании геометрии.

1824 — Строгое доказательство Н. Абелем неразрешимости в радикалах общего уравнения 5-й степени.

1825 — «Мемуар об определенных интегралах» (написан в 1814 г.) О. Коши. «Интегральная теорема Коши».

1825—1831 — Работы Гаусса по биквадратичным вычетам, по алгебре и арифметике комплексных чисел.

1825—1838—«Трактат об эллиптических функциях и эйлеровых интегралах» А. М. Лежандра. Введение сферических функций («многочлены Лежандра».) Разложение эллиптических интегралов в ряды и таблицы их значений.

1826 — «Сжатое изложение начал геометрии...» — доклад Н. И. Лобачевского, содержащий первое изложение начал геометрии Лобачевского.

1826—1829—Работа Н. Абеля в области анализа и алгебры. Работы Н. Абеля 1827 г. и К. Г. Якоби 1829 г., заложившие основы теории эллиптических функций.

1827 — 1) «Общие исследования относительно кривых поверхностей» Гаусса. Внутренняя геометрия поверхности. Гауссова кривизна.
2) «Барицентрическое исчисление» А. Мёбиуса. Начала аналитической проективной геометрии. Общее понятие проективного преобразования (коллинеация).

1828—1832—1) Работы Галуа. Теория групп, теория конечных полей. Начало современной алгебры.
2) «Аналитико-геометрические исследования» Ю. Плюккера. Развитие аналитической проективной геометрии.

1828 — Работы М. В. Остроградского «О распространении волн в цилиндрическом бассейне» и «О теории теплоты». Формула преобразования тройных интегралов в двойные (обобщена им на случай n-кратного интеграла в 1834 г.).

1829 — 1) «О началах геометрии» Н. И. Лобачевского — первый печатный труд по неевклидовой геометрии.
2) «Правило Штурма» для определения числа корней алгебраических уравнений, лежащих на заданном отрезке.

1830 — 1) «Учение о функциях» Б. Больцано (опубликовано лишь в 1930 г.). Первый пример непрерывной кривой, не имеющей касательной ни в одной своей точке. Современное понятие сходимости рядов.
2) «Трактат по алгебре» Д. Пикока. «Принцип перманентности».
3) «Арифметические исследования» В. Буняковского.

1830—1840—Работы по внутренней геометрии поверхностей Ф. Миндинга.

1831 — «Анализ определенных уравнений» Ж. Фурье. Численные методы решения уравнений.

1832 — 1) «Систематическое развитие зависимости геометрических образов друг от друга» Я. Штейнером. Проективная теория кривых 2-го и 3-го порядка.
2) «Аппендикс» Я. Бойяй — независимое от Лобачевского открытие геометрии Лобачевского.

1833 — 1) Попытки доказательства V постулата А. Лежандром.
2) «Об интегрировании рациональных дробей» М. В. Остроградского.

1834 — 1) «Алгебра или вычисление конечных» Н. И. Лобачевского (написана в 1825 г.). Метод приближенного вычисления корней уравнений любой степени. Новое, общее определение функции как произвольного соответствия (независимо от Лобачевского данное Дирихле на 3 года позже).
2) «Новая теория вращения тел» С. Пуассона. Введение понятия «эллипсоида инерции».

1834—1835—«О моментах сил» М. Остроградского и «Общий метод динамики» У. Гамильтона. Развитие вариационных методов.

1835—1836—«Воображаемая геометрия» и «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» Н. И. Лобачевского. Развитие идей неевклидовой геометрии.

1835—1838—«Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» Н. И. Лобачевского.

1837 — «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов» М. Шаля.

1838 — «О линейных дифференциальных уравнениях» М. Остроградского.

1839 — «Руководство к преподаванию арифметики» П. С. Гурьева — создание методики арифметики в России.

1840 — «Геометрические исследования по теории параллельных линий» Н. И. Лобачевского.

1841 — «О построении и свойствах определителей» К. Якоби. Функциональные определители.

1842 — Э. Куммер вводит идеальные числа и закладывает основы современной теории алгебраических чисел (развитой в трудах Л. Кронекера, Р. Дедекинда, Е. Золотарева и Д. Гильберта).

1843 — Введение понятия кватерниона У. Гамильтоном и начало развития им векторной алгебры.

1844 — 1) «Учение о линейном протяжении» Г. Грассмана — первое систематическое построение учения о многомерном евклидовом пространстве. Развитие векторного исчисления.
2) Открытие существования трансцендентных чисел Ж. Лиувилем.

1846 — «Основания математической теории вероятностей» В. Буняковского.

1846—1878—Основы теории алгебраических инвариантов в работах А. Кэли.

1847 — 1) «Геометрия положения» Х. Штаудта. Чисто геометрическое обоснование проективной геометрии.
2) «Диссертация» Ф. Френе. «Формулы Френе».
3) «Математический анализ логики» Дж. Буля — начало создания математической логики (развитой позже в трудах Буля, П. С. Порецкого, Э. Шрёдера, Г. Фреге, Дж. Пеано и Б. Рассела).

1848 — «Предварительные исследования по топологии» И. Листинга. Введение термина «топология».

1849 — 1) Школьное издание А. де Моргана «Начал» Евклида.
2) «Теория сравнений» и «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» П. Л. Чебышева — первые после Евклида обоснованные результаты об асимптотическом распределении простых чисел в натуральном ряду.

1851 — 1) «Парадоксы бесконечного» Б. Больцано. Определение бесконечного множества как равномощного своей правильной части.
2) «Основы общей теории функций комплексного переменного» — докторская диссертация Римана. Начало геометрического направления в развитии теории аналитических функций. Развитие теории конформных отображений.

1853 — 1) «Об изгибании поверхностей» К. Петерсона. Полная система основных уравнений теории поверхностей.
2) «Лекции о кватернионах» У. Гамильтона. Появление термина «вектор».

1853—1867—Работы П. Чебышева в области анализа. «Полиномы Чебышева».

1854 — 1) Лекция Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Создание дифференциальной геометрии многомерного пространства, снабженного метрикой (римановой геометрии). Эллиптическая неевклидова геометрия.
2) «Законы мышления» Дж. Буля. Алгебра логики.

1855 — 1) «Пангеометрия» — последний труд Лобачевского.
2) «Руководство начальной геометрии» М. Остроградского.

3) «Теория кругового сродства в чисто геометрическом изложении» А. Мёбиуса — синтетическая теория круговых преобразований.

1856 — «Исследование функций мнимого переменного» Ш. Брио и Ж. К. Буке — первое систематическое изложение теории аналитических функций.

1857 — «Теория абелевых функций» Б. Римана. Принцип аналитического продолжения. Основы топологии поверхностей.

1857—1864—Курс лекций по теории аналитических функций К. Вейерштрасса.

1858 — 1) Открытие существования односторонних поверхностей А. Мёбиусом («лист Мёбиуса»).
2) А. Кэли закладывает основы теории матриц.

1859 — 1) «Шестой мемуар о формах» А. Кэли. Введение общего проективного мероопределения.
2) «Неравенство Буняковского» (переоткрытое Шварцем в 1875 г.).
3) Работы П. Чебышева об интерполировании.

1861 — 1) «О приложении принципа наименьшего действия к определению объема воды на водосливе» Н. Брашмана.
2) «Исследования некоторых числовых функций» В. Буняковского.

1863 — 1) «Лекции по теории чисел» П. Лежена Дирихле.
2) «Одиннадцатое дополнение» Р. Дедекинда к «Лекциям по теории чисел» Лежена Дирихле. Теория алгебраических чисел. Общее определение идеала.

1864 — 1) «О первоначальном обучении счету» К. Ушинского.
2) «Элементарная геометрия» А. Давидова.
3) Основание Московского математического общества.

1866 — 1) «О средних величинах» П. Чебышева. «Неравенство Чебышева». Закон больших чисел.
2) «Лекции по динамике» К. Г. Якоби. Определение геодезических линий на эллипсоиде.
3) «Начальная алгебра» А. Давидова.

1868 — 1) «Опыт интерпретации неевклидовой геометрии» Бельтрами — начало признания неевклидовой геометрии Лобачевского.

2) «Новая геометрия пространства» Ю. Плюккера. Обобщение понятия координат.
3) «О фактах, лежащих в основании геометрии» Г. Гельмгольца.

1870 — «Трактат о подстановках и об алгебраических уравнениях» К. Жордана — первый систематический курс теории групп и теории Галуа.

1871 — 1) «О так называемой неевклидовой геометрии» Ф. Клейна.
2) «О пространствах произвольного числа измерений Э. Бетти.

1872 — 1) «Эрлангенская программа» Ф. Клейна. Геометрия как учение о группах преобразований.
2) «Непрерывность и иррациональные числа» Р. Дедекинда. Строгое обоснование теории действительных чисел (данное почти одновременно несколько иными путями Г. Кантором и К. Вейерштрассом).
3) «Линейные ассоциативные алгебры» Б. Пирса.

1873 — 1) Трансцендентность числа «*e*», установленная Ш. Эрмитом.
2) «Предварительный очерк бикватернионов» В. Клиффорда. Развитие геометрии трехмерного эллиптического пространства.
3) Теория непрерывных групп С. Ли. Группы Ли.

1874 — 1) Доказательство Г. Кантором несчетности множества всех действительных чисел, т. е. существования неэквивалентных бесконечных множеств.
2) «К истории математики в древности и в средние века» Г. Ганкеля.
3) Арифмометр В. Т. Однера.
4) «Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению» Е. Золотарева. Развитие теории алгебраических чисел.
5) «К теории уравнений и частных производных» С. Ковалевской.

1878 — 1) Общее понятие мощности множества, сформулированное Г. Кантором. Принципы сравнения множеств.
2) «О кройке платья» Чебышева. «Чебышевские сети». Арифмометр Чебышева.
3) «Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей» А. А. Маркова.

1879 — Начало историко-математических исследований В. В. Бобынина.

1879—1884—Развитие математической логики в трудах Г. Фреге и П. С. Порецкого.

1880 — 1) «О бинарных квадратичных формах положительного определителя» А. А. Маркова.
2) «Начала» Евклида с пояснительным введением и толкованиями» М. Е. Ващенко-Захарченко.

1880—1882—«Руководство к преподаванию арифметики» В. Латышева.

1880—1908—1) «Лекции по истории математики» (4 тома) М. Кантора.
2) «Методические работы и учебники по арифметике» А. И. Гольденберга и С. Шохор-Троцкого.

1881 — «Основания арифметической теории алгебраических величин» Л. Кронекера.

1881—1882—Построение общей теории автоморфных функций Ф. Клейном и А. Пуанкаре.

1881—1885—«О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» А. Пуанкаре. Построение качественной теории дифференциальных уравнений. Топология кривых линий.

1882 — 1) «Лекции по новой геометрии» М. Паша. Аксиомы порядка.
2) Доказательство трансцендентности «л» Ф. Линдеманом.

1882—1887—«Курс анализа» К. Жордана.

1883 — «Основы общего учения о многообразиях» Г. Кантора. Создание арифметики трансфинитных чисел.

1884—1890—М. Д'Окань закладывает основы номографии.

1884 — 1) Создание абсолютного дифференциального исчисления (тензорного анализа) Г. Риччи-Курбастро.
2) «Интеграл Стильтеса».
3) «Лекции об икосаэдре» Ф. Клейна.
4) Обобщение Н. Сониным «уравнения Абеля».
5) «Арифметика» А. П. Киселева.

1884—1885—«О приведении одного класса абелевых интегралов 3-го ранга к интегралам эллиптическим» и «О форме кольца Сатурна» С. Ковалевской.

1885 — Начало конструктивной теории функций в работах К. Вейерштрасса и П. Л. Чебышева.

1887 — 1) «Об основных гипотезах геометрии» А. Пуанкаре.
2) «О двух теоремах относительных вероятностей» П. Чебышева.

1888 — 1) «Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки» С. Ковалевской (отмечена премией Парижской АН).
2) «Элементарная алгебра» А. П. Киселева.

1888—1893—«Теория групп преобразований» С. Ли.

1888—1894—Основы алгебраической теории простых групп Ли в работах В. Киллинга и Э. Картана.

1888—1896—«Лекция по общей теории поверхностей» Г. Дарбу: основы проективно-дифференциальной и конформно-дифференциальной геометрии.

1889 — 1) «О приближенных выражениях квадратного корня переменной через простые дроби» П. Чебышева.
2) «Логически изложенные основания геометрии» Дж. Пеано.

1890 — Дж. Пеано строит кривую, проходящую через все точки квадрата.

1890—1891—Классификация кристаллических пространственных решеток методом теории групп Е. С. Федоровым и А. Шенфлисом.

1890—1893—Д. Гильберт решает основные проблемы теории алгебраических инвариантов.

1891 — «Элементарная геометрия» А. П. Киселева.

1891—1896—«Трактат по анализу» Э. Пикара.

1892 — 1) «О функциях, наименее уклоняющихся от 0 в данном промежутке» А. А. Маркова.
2) «Общая задача об устойчивости движения» А. М. Ляпунова. Создание ряда новых математических методов.

1893 — 1) «Новые методы небесной механики» А. Пуанкаре. Теория асимптотических разложений, теория интегральных инвариантов. Основы качественной теории дифференциальных уравнений.
2) «О движении твердого тела в жидкости» В. А. Стеклова.

1893—1898—Классические труды по теории колебаний корабля, курс «Вибрации судов» А. Н. Крылова.

1893—1912—Создание операционного исчисления О. Хевисайдом.

1895 — «Анализ положения» А. Пуанкаре. Основы комбинаторной топологии.

1895—1903—Построение винтового исчисления и неевклидовой механики А. П. Котельниковым и Э. Штуди.

1896 — 1) Начало исследований по общей теории интегральных уравнений В. Вольтерры. Введение общего понятия функционала.
2) Строгое обоснование асимптотического закона распределения простых чисел Ж. Адамаром и Ш. Ла-Валле Пуссеном.

1897 — «О некоторых возможных применениях теории множеств» — доклад Ж. Адамара на I Международном конгрессе математиков в Париже.

1898 — «О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле» А. М. Ляпунова.

1898—1901—1) Доказательство центральной предельной теоремы теории вероятностей А. А. Марковым и А. М. Ляпуновым.
2) «Лекции по элементарной геометрии» Ж. Адамара.

1899 — 1) «Основание геометрии» Д. Гильберта — первая полная система аксиом евклидовой геометрии.
2) «Элементарная геометрия как дедуктивная система» М. Пиери.

1900 — 1) «Исчисление вероятностей» А. А. Маркова.
2) Формулировка Д. Гильбертом 23 основных проблем математики на II Международном математическом конгрессе.

1900—1903—Построение общей теории интегральных уравнений Э. Фредгольмом.

1900—1910—Д. Гильберт развивает теорию интегральных уравнений и закладывает основы современной теории линейных операторов.

Конец XIX—начало XX в. — 1) Дж. Пеано, Э. Пикар и др. развивают метод последовательных приближений для доказа-

тельства теорем существования решений дифференциальных уравнений.
2) Исследование французских математиков Р. Бэра, Э. Бореля и А. Лебега по метрической и дескриптивной теории функций действительного переменного.
3) Исследование функциональных пространств В. Вольтерроя и С. Пинкерле, Д. Гильбертом и Ф. Риссом.
4) Геометрические методы исследования в теории чисел Г. Минковского и Г. Ф. Вороного.
5) М. Фреше, Ф. Рисс, Ф. Хаусдорф и др. развивают теоретико-множественную топологию.

Конец XIX—30-е годы XX в. — Историко-математические исследования. Расшифровка и изучение древнеегипетских папирусов и древневавилонских табличек Б. А. Тураевым, В. В. Струве (СССР), Ф. Тюро-Данженом (Франция), О. Нейгебауэром (Германия) и др.

1901 — 1) «О поверхностях постоянной гауссовой кривизны» Д. Гильберта.
2) Систематическое изложение тензорного исчисления Г. Риччи-Курбастро и Т. Леви-Чивита.
3) «Общие методы решения основных задач математической физики» В. Стеклова.
4) «Линейные системы конических сечений» А. Власова.

1902 — Введение А. Лебегом понятия меры множеств. Интеграл Лебега.

1902—1909 — 1) Построение Э. Картаном теории представлений групп Ли.
2) «Лекции по дифференциальной геометрии» Л. Бианки.

1902—1905 — «Курс математического анализа» Э. Гурса.

1903—1912 — Работы С. Н. Бернштейна по теории дифференциальных уравнений и теории приближения функции многочленами. Создание конструктивной теории функций.

1904 — 1) Теория *формальных* математических доказательств Д. Гильберта.

2) Исследование С. Н. Бернштейном эллиптических дифференциальных уравнений.

1904—1905— «Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии» В. Кагана.

1905 — Специальная теория относительности А. Эйнштейна.

1907 — «О приближенных вычислениях» А. Н. Крылова.

1905—1907— «Основания геометрии» В. Ф. Кагана (2 ч.).

1908 — 1) «Время и пространство» Г. Минковского.
2) «Полярные системы высших порядков в формах первой ступени» А. Власова.
3) «Теория конечных группп» Д. Граве.

1909 — «Наглядная геометрия» А. Астряба.

1910 — 1) «Курс алгебраического анализа» Д. Граве.
2) «О геометрических основаниях Лоренцовой группы» Ф. Клейна.

1911 — «О последовательностях измеримых функций» Д. Егорова.

1912 — Открытие *C*-свойства Н. Лузиным. Развитие теории измеримых множеств и функций.

1912—1913— Исследования по топологии Л. Брауэра (Голландия).

1913 — 1) Построение Э. Картаном теории спиноров.
2) «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах» А. Н. Крылова.
3) «О преобразовании многогранников» В. Кагана.

1914 — «Абстрактная теория групп» О. Ю. Шмидта (2-е издание, 1933 г.). Формирование абстрактной теории групп как самостоятельной дисциплины (для бесконечных групп).

1915 — «Интеграл и тригонометрический ряд» Н. Н. Лузина. Развитие метрической и создание дескриптивной теории функций.

1916 — Общая теория относительности А. Эйнштейна.

1916—1918— Возникновение теории аналитических множеств (*A* — множеств) в работах П. С. Александрова и М. Я. Суслина.

1917 — «Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей» С. Бернштейна — первое аксиоматическое построение теории вероятностей.

1918 — Аэродинамическая теория винта. Жуковский Н. Е.

1918 — Пространства аффинной связности Г. Вейля.

1920—1928—Работы Э. Нетер — основы общей («абстрактной») алгебры.

1922—1924—1) Работы П. Урысона и П. Александрова по топологии. Построение теории размерности топологических пространств; синтез комбинаторного и теоретико-множественного направлений в топологии.
2) Теория линейных нормированных пространств С. Банаха.

1925—1926—1) Построение теории почти периодических функций Г. Бором.
2) Начало современного развития теории топологических непрерывных отображений С. Лефшетцем и Г. Гопфом.

1927—1929—Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман доказывают теорему о трех геодезических и переносят вариационные методы на функциональные пространства.

1929—1934—Решение А. О. Гельфондом VII проблемы Гильберта.

1930 — 1) «Современная алгебра» Б. Ван дер Вардена.
2) Создание нового метода в теории чисел А. Шнирельманом.

1931 — Доказательство К. Геделем неполноты аксиоматизации арифметики натуральных чисел.

1932 — 1) Общий закон двойственности Л. С. Понтрягина. 2) «Об обосновании проективной геометрии» А. Н. Колмогорова.

1933 — 1) Аксиоматика теории вероятностей А. Н. Колмогорова.
2) В. А. Котельников доказывает одну из основных теорем теории информации.

1934 — Решение V проблемы Гильберта для коммутативных групп Л. С. Понтрягиным и для компактных групп Дж. фон Нейманом.

1936 — Условия устойчивости любых систем профилей М. Келдыш

1936—1937—Начало развития теории алгоритмов в работах А. Черча и А. Тьюринга.

1936—1950—Появление обобщенных функций в трудах С. Л. Соболева по теории дифференциальных уравнений.

1937 — Решение И. М. Виноградовым проблемы Гольдбаха для достаточно больших чисел.

1938 — «Топологические группы» Л. С. Понтрягина.

1939 — Начало публикации лекций И. Г. Петровского по теории дифференциальных уравнений.

1939 — Начало публикации «Элементов математики» Н. Бурбаки — крупнейшего трактата по современной математике.

1941 — «Нормирование кольца» И. М. Гельфанда.

1943 — Построение первой электронной вычислительной машины в США.

1947 — «Унитарные представления классических групп» И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка.

1947—1955—Доказательство несуществования алгоритмов для решения ряда алгебраических проблем В. Постом, А. А. Марковым и П. С. Новиковым.

1948 — 1) «Кибернетика» Н. Виннера.
2) Развитие теории информации К. Шэнноном.

1949 — Разработка А. В. Погореловым теории выпуклых поверхностей, на основе которой развит метод исследования устойчивости оболочек.

1950 — Первый после Отечественной войны Международный математический конгресс в Гарварде (США).

1950—1960—1) Развитие теории обобщенных функций Л. Шварцем, С. Л. Соболевым, И. М. Гельфандом и др.
2) Исследования М. В. Келдыша по теории несамосопряженных дифференциальных уравнений.
3) Применение В. Л. Канторовичем методов функционального анализа к вопросам приближенных вычислений.
4) Создание новых методов в алгебраической топологии Ж. Лере, А. Картаном, Ж. Серром и др.

1952 — Полное решение пятой проблемы Гильберта Э. Глизоном, Д. Монтгомери и Л. Циппиным.

1954 — Международный математический конгресс в Амстердаме.

1958 — Международный математический конгресс в Эдинбурге.

1960 — Международный математический конгресс в Стокгольме.

1961 — Развитие Л. С. Понтрягиным и его учениками теории оптимального управления динамическими системами.

1962 — «Вариационный метод в краевых задачах для системы уравнений эллиптического типа» М. А. Лаврентьева.

1966 — Международный математический конгресс в Москве.

1970 — Завершено опубликование четырехтомного труда математиков АН СССР и АН УССР «История отечественной математики».

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

2. 6

3. 28. Указание: 1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=\frac{25}{28}$; 2) $1-\frac{25}{28}=\frac{3}{28}$; 3) $3:\frac{3}{28}=28$.

4. $3\frac{15}{16}$ дня.

5. $2\frac{3}{5}$. Указание: если первой смеси взять вчетверо больше, то она будет стоить $4\cdot 3(3+6)=108$ дяо. Отсюда, сравнивая со второй смесью, получается, что 20 фунтов второго сорта стоит 52 дяо. Итак, фунт второго сорта стоит $\frac{52}{20}=2\frac{3}{5}$ дяо.

6. 15. Указание: 1) $1-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}-3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{15}$; 2) $1:\frac{1}{15}=15$.

7. 48. Автор решает задачу, прибегая к «правилу ложного положения» (гл. 1, п. 6), полагая искомое равным 3.

8. 2376 денежков.

9. Ответ у Анания дается в виде записи «египетскими» дробями: $\frac{1}{4}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{22}$, т. е. $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{22}=\frac{6}{11}$ часа.

10. 35 дней. Указание: в день жена выпивает $\frac{1}{10}-\frac{1}{14}=\frac{1}{35}$ кади.

12. 315 быков.

15. 375.

16. 1480 ф.

17. 76.

18. 4. В рукописи задача решается «методом ложного положения». Если бы первый дал 1, то следующие дали бы 2; 6; 24, все же вместе — 33, но они дали 132, вчетверо больше, следовательно, первый дал 4, второй — 8, третий — 24, четвертый — 96.

21. 4; 2.

22. 8; 2.

23. $5\frac{1}{7}$ дня.

34. 2. Указание: $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$.

35. 287.

37. (1792 — 1856).

38. 7; 49, 343; 2401, 16 807; 19 607;

39. $7 + 49 + 343 + 2401 + 16\,807 + 117\,649 = 137\,256$.

40. 75.

41. «Придет в восьмой день».

42. 5; 7; 25; 96; 100.

43. 2; 4; 8; 16; 10; 25.

44. в) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = (1 + n) + (2 + n - 1) + \cdots + \frac{1+n}{2}\, n$.

45. В общем виде: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = \frac{(1 + 2n + 1)(n + 1)}{2} = (n + 1)^2$.

46. $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, ... в общем виде $(2n + 1) = (n + 1)^2 - n^2$.

49. 12 кроликов, 23 фазана.

50. Индийцы решали задачу «методом инверсии»: начиная с последнего данного, производятся в обратном порядке действия, обратные тем, которые указаны в условии задачи. В данном случае: $\sqrt{4} = 2$; $2 + 1 = 3$; $3^2 = 9$, $9 - 6 = 3$; $3 \cdot 5 = 15$; $15 : 3 = 5$.

Этот метод позаимствовали ученые стран ислама, а затем и Европы.

54. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.

55. $2\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{2}$.

56. $172\frac{21}{32}$; $\frac{21}{32}$ в рукописи представлена в виде суммы единичных дробей: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{48}$, $\frac{1}{96}$.

57. 84. *Решение*: 1) $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{75}{84}$; 2) $1 - \frac{75}{84} = \frac{9}{84}$; 3) $5 + 4 = 9$; 4) $9 : \frac{9}{84} = 84$.

58. $7\frac{1}{2}$. Указание: промежуток между 0 ч ночи до момента, о котором идет речь в задаче, относится к промежутку времени между этим моментом и 12 ч дня как $\frac{2}{3} : \frac{2}{5}$, или как 5 : 3. Сумма обоих промежутков 12 ч. Искомое показание часов $\frac{12}{5+3} \cdot 5 = 7\frac{1}{2}$.

61. 0,4.

62. 2,7.

63. $3\frac{3}{8}$. Указание: $2+1+\frac{0}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$.

64. $4\frac{8}{25}$.

66. 75; 63. *Решение:* 1) $5 \cdot 138 = 690$ р., 2) $690 - 540 = 150$ р., 3) $5 - 3 = 2$ р., 4) $150 : 2 = 75$ (арш.), 5) $138 - 75 = 63$ (арш.)

67. Сын должен получить в два раза больше жены, жена — в два раза больше дочери. Имение следовало разделить между сыном, женой и дочерью прямо пропорционально числам 4:2:1.

68. 9 человек. Стоимость курицы 70.

69. Указание: дети переправляются на другой берег. Один из них там остается, а другой возвращается с лодкой. Потом переезжает один солдат и посылает обратно лодку с мальчиком. Снова дети едут на противоположный берег и т. д., пока вся рота не будет перевезена.

70. 20. Указание: назовем «пайком» количество травы, съедаемое 1 коровой в 1 день. За 24 дня 70 коров съедят $24 \cdot 70 = 1680$ пайков. В эти 1680 пайков входит и прирост травы за 24 дня. 30 коров за 60 дней съедят $60 \cdot 30 = 1800$ пайков. В обоих случаях была съедена вся трава на лугу, таким образом, 1800—1680=120 пайков составляют прирост за 60—24=36 дней, значит, прирост за 24 дня 80 пайков, а первоначальный запас $1680 - 80 = 1600$ пайков. За 96 дней будет прирост $1600 + 320 = 1920$ пайков. За 1 день съедают $1920 : 96 = 20$ пайков, т. е. за 96 дней всю траву поедают 20 коров.

71. 7; 49 000. Указание: так как все сыновья получили поровну, то $\frac{1}{8}$ часть = 1000 рублей, а остальные 7000 получил младший сын, который, таким образом, был седьмым сыном. Итак, сыновей было 7, а всего денег $7000 \cdot 7 = 49\,000$ рублей.

72. Указание: на первом лугу косцы проработали $\frac{1}{2}$ дня—вся бригада и $\frac{1}{2}$ дня — половина бригады, что составляет $\frac{3}{4}$ рабочего дня. На втором лугу в первый день работала $\frac{1}{2}$ бригады в течение $\frac{1}{2}$ дня, т. е. затрачено $\frac{1}{4}$ рабочего дня целой бригады. Так как по площади второй луг в 2 раза меньше первого, то, для того, чтобы выкосить его, вся бригада должна была бы работать $\frac{3}{8}$ дня. Следовательно, на второй день на меньшем лугу останется $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ часть работы всей бригады за день. А так как эту работу выполнил один косец, значит, вся бригада состояла из 8 косцов.

97. Указание: $x = 9k + 1$; $x^2 = 81k^2 + 18k + 1 = 9(9k^2 + 2k) + 1$; $y = 9k + 8$; $y^2 = 81k^2 + 144k + 64 = 9(9k^2 + 16k + 7) + 1$.

98. Указание: $x = 9k + 2$, тогда $x^2 = 9k_1 + 4$.

99. Указание: $x = 9k + 1$, $x^3 = 9k_1 + 1$.

100. $1\frac{1}{2}$.

101. 4; 6

102. $\frac{7}{2}$. Указание: $2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$; $x^3 = \frac{343}{8}$

104. 12 000; 8000; 4000.

105. 11.

106. $x = y = 0$.

108. 120.

109. 170; 40. Вводя вспомогательное неизвестное, Бхаскара принимает, что первый имеет $2x - 100$, тогда по условию задачи второй имеет $x + 100$. Второе условие приводит к уравнению: $6(2x - 100 - 10) = x + 100 + 10$, откуда $x = 70$.

110. 36.

111. 5,4.

112. 28 ф.

113. 9,2.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Белл Э. Т. Творцы математики. Предшественники современной математики. / Под ред. С. Н. Киро. М., 1979.
2. Гуров С. П. и др. П. Л. Чебышев. Пособие для учащихся. М., 1979.
3. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия в трех томах. / Под ред. Юшкевича А. П., М., 1970, т. I, II, 1972, т. III.
4. Лаптев Б. Л. Н. И. Лобачевский. М., 1978.
5. Сираждинов С. Х., Матвиевская Г. П. Абу Райхан Беруни и его математические труды. М., 1978.
6. Хрестоматия по истории математики / Под ред. А. П. Юшкевича в двух томах. М., 1975, 1976.
7. Математика в школе. Рубрики «Математический календарь» и «Ученые-математики» (с 1975 г.)

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ [1]

Абу-л-Вафа (940—998) 152
Абу Камил (ок. 850—930) 111
Алькуин (Alcuin, 735—804) 169, 186
Анания Ширакаци (VII) 69, 70
Аполлоний Пергский (ок. 260? — 170 до н. э.) 65, 93, 149
Ариабхатта I (V) 68
Аристарх Самосский (IV — III вв. до н. э.) 185
Аристотель (384—322 до н. э.) 124, 133
Архимед (287—212 до н. э.) 32, 51, 60, 61, 66, 87, 88, 149, 180, *182—186*
Ахмес (ок. 2000 до н. э.) 24, 27, 28, 55, 57, 80, 91, 119, 186, 189

ал-Банна (XIII—XIV) 177
Беббедж Ч. (1791—1871) 157
Беда Достопочтенный (ок. 673—735) 19, 126
Белли С. (Belli S., XVI) 123
Бенедиктов В. Г. (1807—1873) 171
Бернулли И. (Bernoulli Johann, 1667—1748) 99
Бертран (Bertrand L., 1731—1812) 114
ал-Беруни (973—1048) 111
Бехаэддин (1547—1622) 190, 195
Бобынин В. В. (1849—1919) 150
Боев Г. П. (1898—1959) 149
Больцано Б. (Bolzano B., 1781—1848) 101, 102
Бомбелли (Bombelli R., XVI) 95, 111, 112, 113
Бонфис И. (XIV в.) 181
Бороздкин К. Г. 75
Борги П. (Borghi P., XV в.) 110
Боэций (Anicius Manlius Boethius, ок. 480—524) 60, 76, 78, 127, 153
Бояй (Bolyai J., 1802—1860) 118
Брадвардин (Thomas Bradwardine, ок. 1290—1349) 179
Брахмагупта (598—625) 63, 68, 178
Бруно (Bruno G., 1548—1600) 166, 168
Бубнов Н. М. (1858—?) 150
Буратгини (Burattini T., 1615—1682) 139
Бухштаб А. А. (р. 1905) 136
Бхаскара II (род. 1114—1185?) 62, 63, 68, 69, 194
Бюффон де (de Buffon G. L., 1707—1788) 146

Валлис (Wallis J., 1616—1703) 66, 79, 81, 108, 133
Видман (Widman Jan, 1460 — первая половина XVI в.) *44,* 45, 47, 110, 181
Виет (Viete F., 1540—1603) 23, 42, 81, 95, 96, 111, 113, 181
да Винчи Л. (da Vinci L., 1452—1519) 90, 180

[1] Указаны страницы. Курсивом набраны номера страниц, содержащих биографические сведения. В скобках отмечены годы жизни. В Указатель не включены имена из хронологического справочника «Века и годы».

Виноградов И. М. (род. 1891) 74, 75, 88
Витувий П. (I в. до н. э.) 90

Галилей (Galilei G., 1564—1642) 166, *167*, 185
Гамильтон (Hamilton W. R., 1805—1865) 114
Гарриот (Harriot T., 1560—1621) 24, 45, 108, 113
Гаусс (Gauss K. F., 1777—1855) 79, 88, 104, 110, 118, *188*, 189
Гельфонд А. О. (1906—1968) 88
Герберт (Сильвестр II, ок. 940—1003) 77, 153
Геродиан (II в.) 32
Герон Александрийский (I в.) 56, 115, 151, 194
Герхард Фридерикус (XV в.) 180
Герцен А. И. (1812—1870) 168
Гильберт (Hilbert D., 1862—1943) 120
Гипатия (370—415) 167
Гиппократ (V в. до н. э.) 55, 120
Глейзер Г. И. (1904—1967) 5, 123
Голубев В. А. 136
Гольдбах (Goldbach Ch., 1690—1764) 73—75
Гончаров В. Л. (1896—1955) 130
Гораций (65—8 до н. э.) 26
Григорий XIII (XVI в.) 163

Даламбер (d'Alembert J., 1717—1783) 60
Дарвин (Darwin Ch. R., 1809—1882) 168
Декарт (Descartes R., 1596—1650) 64, 65, 81, 83, 95, 96—101, 108, 110, 112, 113, 125
Деламбр (Delambre J.—B. J., 1749—1822) 37, 84, 139
Делоне Б. Н. (род. 1890) 88
Демокрит (ок. 460—380 до н. э.) 167
Дешаль (Deshales Cl., 1621—1678) 81
Джонсон (XVII в.) 45
Диофант (III в.) 51, 62, 63, 81, 85, 86, 88, 98, 103, 104, 107—111, 114—116, 151, 190, 192
Дирихле Лежен (Dirishlet P. G. Lejeune, 1805—1859) 102, 119
Евдем Родосский (IV в. до н. э.) 90, 119, 123
Евдокс Книдский (ок. 406 — ок. 355 до н. э.) 51, 55, 82
Евклид (365 — ок. 300 до н. э.) 32, 51, 54—57, 66, 71—73, 82, 87, 88, 91—93, 110—114, *118*—124, 135, 136, 180, 185, 192

Жирар (Girard A., 1595—1632) 64, 110

Золотарев Е И. (1847—1878) 88, 104
Зубов В. П. (1899—1963) 34, 179

Ибн Сина (980—1037) 188, 193
Игнатьев Е. И. 171
Иоанн Севильский (XII в.) 181
Иоганн из Гмундена (ок. 1380—1442) 181

Кавальери (Cawalieri B., ок. 1598—1647) 79
ал-Каласади (ум. в 1486) 152
Кантор Г. (Cantor G., 1845—1918) 74
ал-Караджи (X—XI) 51, 111, 152, 194
Кардано (Cardano G., 1501—1576) 95
ал-Каши (XIV—XV) 39—42, 51, 111
Кеплер И. (Kepler J., 1571—1630) 43
Кирик Новгородский (XII) 34
Клавий (Clavius Ch., 1537—1612) 43
Кобринский Н. Е. (род. 1910)
де Кольмар Т. 155
Конт (Comte O., 1798—1857) 146
Коперник Н. (1473—1543) 165, 167, 168
Копиевский И. Ф. (XVII в.) 70
Кордемский Б. А. 87, 172
Короленко В. Г. (1853—1921) 171
Крайчик М. (1882—1957) 171
Краснопольский И. 171

Кронекер (Kronecker L., 1823—1891) 103
Кэджори Ф 146
Кюри (Curie P., 1859—1906) 90
Лагранж (Lagrange J. L., 1736—1813) 88, 104, 116, 139
Ламберт (Lambert J. H., 1728—1777) 79
Лаплас (de Laplace P. S., 1749—1827) 139, 149
Лебедев С. А. 157
Лежандр (Legendre A. M., 1752—1833) 90, 114
Лейбниц (von Laibniz G. W., 1646—1716) 11, 45, 65, 83, 99, 101, 110, 114, 115, 143, 155, 185
Лобачевский Н. И. (1792—1856) 95, 102, 118, 122, 124, 186
Лопиталь (de L'Hospital G. F., 1661—1704) 81

Магницкий Л. Ф. (1669—1739) *21—23*, 43—48, 70, 71, 84, 127, 132, 152, 171, 175, 190
Маджини (Maggini G., 1555—1617) 43
Майкельсон (Michelson A., 1852—1931) 140
Максвелл (Maxwell J., 1831—1879) 140
Мануцци А. (XV—XVI) 41
Марков А. А. (1856—1922) 88
Мезириак де Баше (Bachet de Meziriac C. G., 1587—1638) 169, 170, 171, 191
Менделеев Д. И. (1834—1907) 38, 140, 141
Мерсенн М. (Mersenne M., 1588—1648) 135, 136
Мешен (Mechain P. F., 1744—1804) 37, 84, 139
Миклухо-Маклай Н. Н. (1846—1888) 59
Монж Г. (Monge G., 1746—1818) 139
Мокли Дж. У. 157
Муравьев Н. Е. (1724—1770) 116
Мутон (Mouton G., 1618—1694) 139

ан-Насави (ум. ок. 1030) 152
Нейгебауэр О. (Neugebauer O., р. 1899) 29, 144
Неморарий (Jordanus Nemorarius, XIII) 179
Непер Д. (Neper J., 1550—1617) 43, 154
Никомах из Геразы (I—II) *32*, 46, 60, 66, 76, 85, 135
Ньютон И. (Nawton I., 1643—1727) 65, 66, 81, 82, 95—101, 108, 110, 112, 113, 115, 179, 191, 193, 194

Обреимов В. И. (1843—1910) 171
Обри 74
Однер В. Т. (1845—1905) 19, 20, 156
Озанам Ж. (Ozanam J., 1640—1717) 194
Орем (Oresme N., 1323—1382) 179, 180
Оутред (Oughtred W., 1574—1660) 45, 81, 83, 108

Папп (III в.) 56, 57
Паскаль (Pascal B., 1623—1662) *155*
Пастер (Pasteur, 1822—1895) 90
Пачоли (Pacioli L., ок. 1445—ок. 1514) 76, 110, 132, 180
Пейербах (Peurbach G., 1423—1461) 110, 181
Первушин И. М. (1827—1900) 136
Питиск (Pitiscus B., 1561—1613) 178
Перельман Я. И. (1882—1942) 172
Пифагор (580 — 500 до н. э.) 32, 46, 51, 55, 57, 78, 85, 87, 88, 91, 93, 120, 123, *133*, *134*, 188
Платон (427 — 347 до н. э.) 92, 93
Подашов А. П. 186
Понселе (Poncelet J. V., 1788—1867) *154*
Посидоний (135—51 до н. э.) 57
Преспер Дж. (младший) 157
Прокл (410 — 485) 57, 92, 93, 119, 123, 124
Птолемей (85 — 165?) 65, 168, 178, 180
Пудловский С. (1597—1647) 139

Регномонтан (Iohannes Regiomontanus, 1436—1476) 45, 124, 135, 181
Рекорд (Recorde R., 1510—1558) 45, 57
Ризе (Riese A., 1489—1559) 42, 78, 132, 195
Риман (Riemann G. F. B., 1826—1866) 118
Ринд (Rhind A. H., XIX) 27
Рудольф (Rudollf K., 1500? — 1545?) 42, 195

Сервуа (Servois F., 1767—1847) 114
Созиген (I в. до н. э.) 163
Спиноза (Spinoza B., 1632—1677) 168
Сридхара (XI в.) 68
Стевин (Stevin S., 1548—1620) 39, 41, 42, 64, 110, 181, 182
Стеклов В. А. (1864—1926) 168
Струве В. В. (1889—1965) 27

Тарталья (Tartaglia N., ok. 1500—1557) 95, 110, 113
Теэтет Афинский (IV в. до н. э.) 82
Толстой Л. Н. (1828—1910) 191, 192
Тураев Б. А. (1868—1920) 27
ат-Туси Насирэддин (1201—1274) 8, 51
Тюро-Данжен (Thureau-Dangin F.) 29

Улугбек (1394—1449) 40, *41*

Фалес Милетский (ок. 624—548 до н. э.) 55, *90—92*, 119, 120, 129
Ферма П. (de Fermat P., 1601—1665) 65, 87, 88, 99, 104, 136, 189
Фибоначчи (Fibonacci L., 1170? — 1250?) 51, 52, 64, 66, 115, 130, 133, 152, 175, 179, 180

Хайям Омар (1048—1131) 51, 82, 111
ал-Хассар (XII в.) 115, 152
ал-Хорезми (787 — ок. 850) 51, *75, 76*, 95, 96, 106, 111, 150, 175, 180, 181, 190

Цезарь (Caesar J., 100—44 до н. э.) 163
Цицерон (Cicero M., 106—43 до н. э.) 152, 182
Цхакая Д. Г. (род. 1899) 69

Чебышев П. Л. (1821—1894) 20, 71, 73, 88, 104, 156
Чехов А. П. (1860—1904) 191

Шейбель (XVI в.) 135
Шиккард В. (XVII в.) 155
Шнирельман Л. Г. (1905—1938) 74, 75, 88
Штифель (Stifel M., 1486—1567) 64, 108, 113, 192
Шюке (Chuquet N., XV) 47, 110, 113, 132, 181

Эйлер (Euler L., 1707—1783) 65, 66, 74, 75, 79, 95, 99, 104, 112, 114, 116, 134—136, 189, 191—194
Энгельс Ф. (1820—1895) 101, 134
Эратосфен (276—194 до н. э.) 71—73, 84, 85, 136, 182
Эссиг (Essig J.) 146
Эригон (Herigone P., XVII) 56, 57

Юшкевич А. П. (род. 1906) 179

Якоби Б. С. (1801—1874) 38
Ямблих (ок. 250—325) 133

ОГЛАВЛЕНИЕ

Обращение к читателям 6
Введение 8

I. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА УРОКАХ

Глава 1. Арифметика и начала алгебры

4 КЛАСС

§ 1. Натуральные и дробные числа 12
1. О происхождении арифметики. Счет и десятичная система счисления . . . . . —
2. О происхождении и развитии письменной нумерации. Цифры разных народов 14
3. О счетных приборах. Русские счеты. Вычислительные машины 18
4. «Счисление» в «Арифметике» Л. Ф. Магницкого 21
5. Буквы и знаки. Алгебраические выражения 23
6. Из истории уравнений. Метод ложного положения 24
7. Задача на составление уравнений из Московского папируса 25
8. О происхождении дробей. Дроби в Древнем Риме . . . . . —
9. Дроби в Древнем Египте 26
10. Вавилонская нумерация. Шестидесятеричные дроби 29
11. Нумерация и дроби в Древней Греции 31
12. Нумерация и дроби на Руси 32
§ 2. Десятичные дроби 35
13. Возникновение и совершенствование мер длины. О метрической системе мер . . . . . —
14. Происхождение десятичных дробей 39
15. От шестидесятеричных к десятичным дробям. Ал-Каши . . . —
16. «Десятая» Симона Стевина 42
17. Распространение десятичных дробей. Их значение в жизни современного общества 43
18. Проценты в прошлом и в настоящее время . . . . . —
19. Арифметические знаки и обозначения. Знак процента . . . 44
20. Об арифметических таблицах 45
21. О том, как дошли люди до настоящей арифметики 48

Глава 2. Геометрия

§ 3. Основные понятия геометрии 53
22. Из истории геометрии . . . . . —
23. О геометрических фигурах. Вычисление отрезков 55
24. О параллельных прямых 57
25. Геометрические инструменты . . . . . —

5 КЛАСС

Глава 3. Арифметика и начала алгебры

§ 4. Положительные и отрицательные числа 59
1. О происхождении различных систем счисления . . . . . —
2. О натуральном ряде. «Исчисление песчинок» Архимеда. Современная запись больших чисел 60
3. Возникновение отрицательных чисел 61
4. «Люди не одобряют отрицательных чисел...» От Диофанта до Бхаскары 62
5. Путь к признанию 64
6. О координатах 65
§ 5. Рациональные числа . . . . . —
7. Что такое ломаное число? . . . . . —
8. Древнекитайская задача с дробями 67
9. Староиндийская задача с цветами и пчелами 68
10. Задачи с дробями у древних армян 69
11. «Арифметика» Магницкого. Ломаные числа 70
12. О простых числах. Евклид, Эратосфен, Чебышев 71
13. О задаче Гольдбаха. Нерешенные задачи теории чисел . . . 73
14. Ал-Хорезми и его «Арифметика» 75
15. Абацисты и алгоритмики в средневековой Европе 76
16. От натуральных к дробным числам 79
17. О периодических дробях . . . . . —
18. Древнеегипетская задача с дробями 80
19. Из истории нуля . . . . . —
20. О коэффициенте 81
21. Число и отношение . . . . . —
22. Пропорции в Древней Греции 82
23. Как записывали пропорции в прошлом 83
24. Задача на пропорциональное деление из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого 84
25. Об измерении земного меридиана Эратосфеном . . . . . —
26. Фигурные числа . . . . . —
27. Треугольные числа 85
28. Квадратные числа. Формула Диофанта 86
29. Магические квадраты . . . . . —
30. От эмпирической к теоретической арифметике 87

Глава 4. Геометрия

§ 6. Геометрические построения 89
31. О происхождении некоторых терминов и понятий . . . . . —
32. О симметрии 90
33. О треугольниках 91
34. О равнобедренном треугольнике. Фалес Милетский . . . . —
35. Задачи на построение 92

6 КЛАСС

Глава 5. Алгебра

§ 7. Основные понятия алгебры 94
1. От арифметики к алгебре . . . . . —
2. О происхождении слова «Алгебра» 95
3. «Всеобщая арифметика» И. Ньютона 96
4. И. Ньютон о языке алгебры 97
5. Решение уравнений в Древней Греции и Индии 98
§ 8. Функции . . . . . —
6. Понятие функции . . . . . —
7.* О методе координат и о графиках 99

8. Декартова переменная величина — поворотный пункт в развитии математики 100
9. Дальнейшее развитие понятия функции 101
§ 9. Система уравнений первой степени с двумя неизвестными . . . 103
10. Неопределенные уравнения . . . . . —
11.* Система уравнений первой степени с двумя неизвестными и ее решение в древности 104
12. Две задачи Ал-Хорезми 106
13. Из «греческой антологии» . . . . . —
14. Учение об уравнениях и расширение понятия о числе . . . —
§ 10. Степень с натуральным показателем 107
15. Начало буквенной символики. Возведение в степень . . . . —
16. Развитие понятия степени. Символы и термины 108
17. Дальнейшее развитие символической записи степени 110
18.* Обозначение a^{-n} . . . . . —
§ 11. Многочлены 111
19. От алгебры риторической к алгебре символической . . . . —
20. Формулы умножения. Геометрическая алгебра в древности 112
21. Из истории скобок 113
22. Об основных законах действий. Распределительный закон у Евклида 114
23. Об одной формуле Диофанта . . . . . —
24. О записи и знаках умножения и деления 115
25. «Универсальная арифметика» Л. Эйлера . . . . . —

Глава 6. **Геометрия**

§ 12. Основные понятия геометрии 117
26. О происхождении геометрии . . . . . —
27. О признаках равенства треугольников 118
28. О прямоугольном треугольнике 119
29. Аксиома 120
30.* О построении прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой. Аксиома параллельности . . . 121
31. Об одном старинном способе определения недоступных расстояний 123
32. О сумме углов треугольника . . . . . —

II. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ НА ВНЕКЛАССНЫХ ЗАНЯТИЯХ

Глава 7. **Из истории арифметики**

§ 1. Пальцевой счет. Различные приемы умножения 126
§ 2. Проверка действий с помощью девятки 130
§ 3. Пифагор и его школа. О дружественных и совершенных числах. Проблемы, ожидающие своего решения 133
§ 4. Из истории мер. Создание международной системы мер 137
§ 5. Системы счисления. Устная и письменная нумерация 141
§ 6. Из истории дробей 150
§ 7. Счетные приборы. Вычислительные машины 153
§ 8. Как научились люди измерять время. Новое определение секунды 161
§ 9. О происхождении некоторых числовых суеверий 165

Глава 8. **Из истории алгебры**

§ 10. Старинные математические развлечения и действия над алгебраическими выражениями 169
§ 11. Алгебра в Древней Индии и Китае 173
§ 12. Арифметика и алгебра в Европе в XII—XV вв. 179
§ 13. Архимед 182

Глава 9. Исторические задачи

§ 14. Арифметика 186
1. Целые числа . . . . . —
2. Дроби 189
3. Общий отдел 190
§ 15. Алгебра 192
4. Действия над алгебраическими выражениями . . . . . —
5. Разные задачи 193
6. Линейные уравнения и их системы 194
Века и годы. Хронологический справочник по истории математики . . 196
Ответы и указания к решению задач 228
Рекомендуемая литература 231
Именной указатель 232

Герш Исакович Глейзер

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ IV—VI классы

Спец. редактор А. А. Свечников
Редактор Э. К. Викулина
Художник М. К. Шевцов
Художественный редактор Е. Н. Карасик
Технический редактор И. В. Квасницкая
Корректор Т. А. Кузнецова

ИБ № 5662

Сдано в набор 18.11.80. Подписано в печать 09.07.81. 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 2, кн. журн. лит. гарн. Печать высокая. Усл. печ. л. 15 + форз. 0,25. Усл. кр.-отт. 16,75. Уч.-изд. л. 14,17 + + форз. 0,46. Тираж 100 000 экз. Заказ 903. Цена 55 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Ярославский полиграфкомбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 150014, Ярославль, ул. Свободы, 97.

Школьные учебники СССР

sheba.spb.ru/shkola